XXIV Marató de Problemes. Problema 445

Jordi Pesao

April 30, 2020

Anem a demostrar que en Cabré no té raó i que per tant sí ho sabem demostrar. Per a cada punt $x \in S$ podem agafar una bola de radi $\epsilon_x > 0$ tal que no intersequi cap altre punt. Sigui B_x la bola centrada en x de radi $\frac{\epsilon_x}{4}$. Per a cada parell (x, y), amb $x \neq y$ de punts de S, les boles B_x i B_y no s'interseques. Demostrem-ho. Assumim WLOG que $\epsilon_x \geq \epsilon_y$. Si s'intersequessin, tindríem que la distància entre x i y seria com a molt $\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{4} \leq \frac{\epsilon_x}{2}$. Però per construcció no hi ha cap punt de S a distància menor que ϵ_x, que és estrictament major que $\frac{\epsilon_x}{2}$, arribant així a una contradicció.

Tota bola B_x contindrà punts de $\mathbb{Q}^n$. Aplicant l'axioma de l'elecció, sigui q_x un d'aquests punts. Sigui $Q = \{q_x : x \in S\}$. Clarament Q i S estan en bijecció, i, com que $Q \subset \mathbb{Q}^n$, tindrem $|S| = |Q| \leq |\mathbb{Q}^n| = |\mathbb{N}|$, com volíem veure.