Problema 607 (Jordi Pesao)

En primer lloc observem que el fet de que es compleixi la desigualtat triangular en els pesos de les arestes implica que la distància de camí mínim entre dos vèrtexs és igual al pes de l'aresta que els uneix. Denotarem per $W(u,v)$ el pes de l'aresta uv i diem que $W(v,v)=0$.

Si per tot vèrtex $u_x \in X$ hi ha un vèrtex $v_y \in Y$ (possiblement $v_y = u_x$) tal que $W(u_x, v_y) \leq d^*$, llavors ja és certa la desigualtat: per qualsevol vèrtex u considerem el vèrtex u_x de X més proper a u, que estarà a distància com a molt d^* i el camí $u - u_x - v_y$ té pes $\leq 2 \cdot d^*$. Notem que aquesta hipòtesi sempre és certa quan $k=1$, ja que tots els vèrtexs estan a distància $\leq d^*$ de u_x. Així que ara treballem suposant que la hipòtesi no és certa (hi ha un $u_x \in X$ a distància major a d^* de tot vèrtex d'Y) i que $k \geq 2$.

Tot vèrtex està a distància $\leq d^*$ d'algun vèrtex d'X (incloent els propis vèrtexs d'X, que estan a distància 0). A cada vèrtex d'Y li assignem un vèrtex d'X a distància $\leq d^*$. Com el u_x no està assignat a cap vèrtex d'Y, hi haurà un altre vèrtex $u \in X$ que estigui assignat a dos vèrtexs $v, w \in Y$. Si $v, w \neq u$, $W(v,w) \leq W(v,u) + W(u,w) \leq 2 \cdot d^*$ per la desigualtat triangular. Si $v = u$, llavors $W(v,w) = W(u,w) \leq d^* \leq 2 \cdot d^*$. Ara apliquem la següent propietat:

Lemma: Per tot $v, w \in Y$, $d \leq W(v,w)$.

Demostració: Siguin $v_1, \ldots, v_k$ els vèrtexs d'Y en l'ordre que es van afegint al conjunt per l'algorisme, $Y_j = \bigcup_{i=1}^{j} \{v_i\}$ i $d_1, \ldots, d_k = d$ les successives distàncies mínimes al conjunt que s'obtenen durant l'execució de l'algorisme. És fàcil veure que $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_k = d$.

Considerem $W(v_i, v_j)$ amb $i < j$. Per construcció, el j-èssim vèrtex està a una distància d_{j-1} de algun vèrtex v_l amb $l < j$. Donat que d_{j-1} és la distància mínima de v_j a Y_{j-1}, tota distància a qualsevol vèrtex d'Y_{j-1} serà $\geq d_{j-1}$, i en particular $W(v_i, v_j) \geq d_{j-1} \geq d$, tal com volíem demostrar.

$\square$

Ara concloem notant que $d \leq W(v,w) \leq 2 \cdot d^*$.