XXIV Marató de Problemes - Fem Piñaki

Problema 649: Tanqueu la porta, si us plau!
S'apropen els exàmens i l'Oscar Benedito ha anat a estudiar al CFIS n dies (i com que és molt aplicat, $n \geq 3$). Cada dia, apunta en un paper el número de cops que diu "Tanqueu la porta, si us plau!". Avui s'ha adonat que aquests nombres són tots primers i que formen una successió aritmètica. Increïble! El podeu ajudar a demostrar que la diferència entre els elements de la successió és divisible per tot primer $p < n$?

Solució:

Sigui $\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n\}$ aquesta successió amb p_i primer per $i = 1, \cdots, n$. Sigui d la diferència entre els elements. Si $d = 0$, aleshores d és divisible per qualsevol enter i es cumpleix l'enunciat. Si $d \neq 0$, podem suposar sense pèrdua de generalitat que d és positiu. En cas contrari reordenem els números (girem l'ordre de la llista) de manera que sí tenim una successó aritmètica de difència $|d|$.

Per tant tenim, amb $d > 0$, la successió

$$\{p_1, p_1 + d, p_1 + 2d, \cdots, p_1 + (n-1)d\}$$

Veiem en primer lloc que tots els elements són més grans o iguals a n, que és el mateix que veure $p_1 \geq n$. Suposem $p_1 < n$, aleshores tenim a la successió l'element

$$p_{p_1+1} = p_1 + p_1 d = p_1(d+1)$$

Per tant, com $p_1 \geq 2$, $d \geq 1$ aquest element és no primer, que és una contradicció. Per això, tots els elements de la successió són majors o iguals a n.

Veiem ara que tots els primers $p < n$ són divisors de d. Suposem que hi ha un $p < n$ tal que d no és múltiple de p i arribem a una contradicció. Com $p < p_1$, p_1 primer:

$$p_1, d \not\equiv 0 \pmod{p}$$

Com p és primer

$$\exists m \in \{1, 2, \cdots, p-1\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n-1\}$$

Tal que

$$md \equiv -p_1 \pmod{p} \implies p_{m+1} = p_1 + md \equiv 0 \pmod{p}$$

Per tant $p \mid p_{m+1} \geq n > p \implies p_{m+1}$ no és primer. Això és una contradicció: d és un múltiple de p.

És a dir, si tenim una successió aritmètica d'n elements, tots números primers, aleshores la diferència entre els elements de la successió és divisible per tot primer $p < n$.