

EGRETTA-GARZETTA

892. Agafeu regla i compàs...

En Guillem Coderch et ve un dia i et diu “Eh tiu, tiu, he trobat un problema per internet que m’ha volat el crani. Si vols, anem a fer un pim-pom ràpid i després te l’explico”. El problema és el següent:

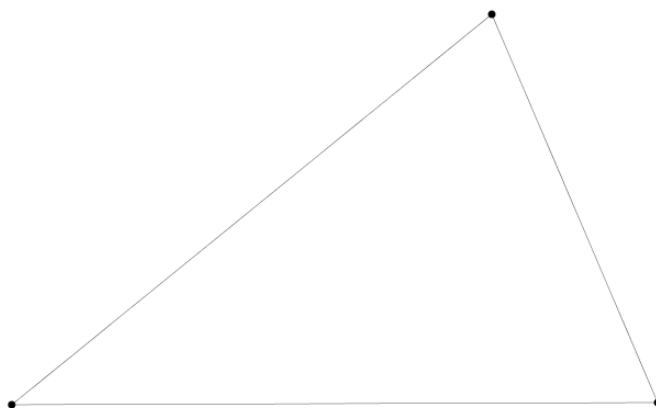
“Donat un triangle agut qualsevol, i utilitzant únicament regla i compàs (i un llapis), construïu la circumferència que passi pels tres punts mitjos de cada costat del triangle.”

En Guillem diu que fer la construcció no és molt difícil, així que us proposa fer-ho en el mínim nombre de moviments (moviment = traçar recta o circumferència). Sabreu fer-ho? Ell afirma que es pot fer en 9 moviments!

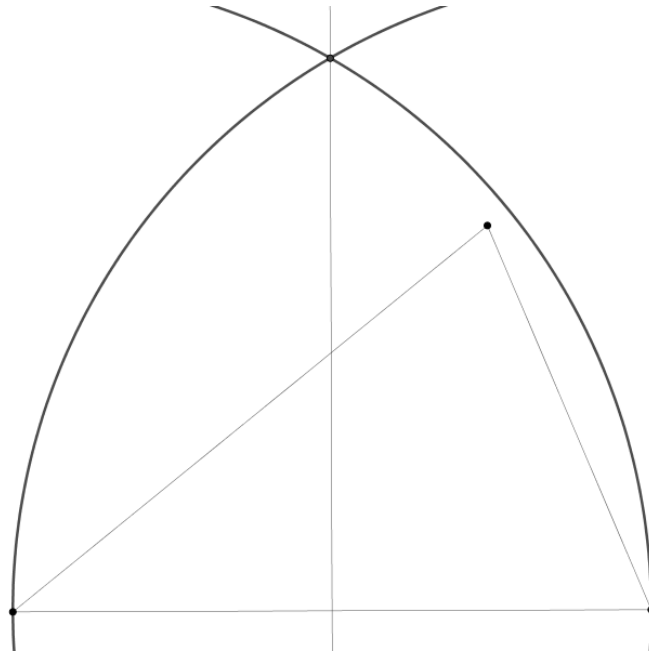
És conegut que el cercle que passa pels punts mitjos és el cercle dels 9 punts. Aquest correspon a fer una homotècia del circumcentre, des de l’ortocentre i amb raó $1/2$. Aquest cercle es diu així perquè a més els punts mitjos dels costats, conté els peus de les altures i els punts mitjos dels segments que uneixen els vèrtexs amb l’ortocentre.

Amb això en ment, anem a construir el cercle dels 9 punts usant només 9 moviments. L’estratègia és la següent:

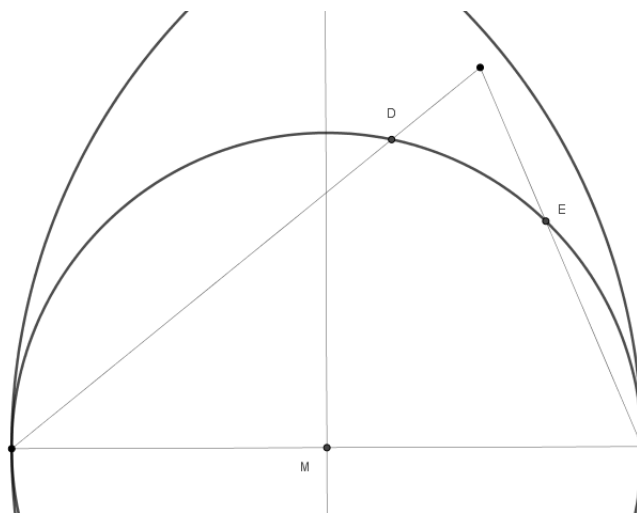
- i) Considerem un triangle qualsevol



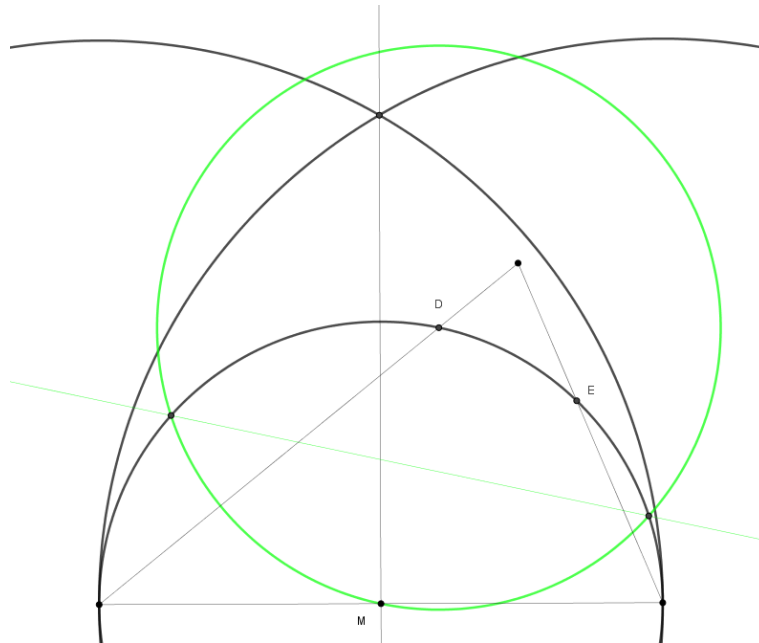
- ii) Tracem la mediatriu d'un costat per tal de trobar-ne el punt mig. Això ho fem amb tres moviments, dues circumferències i una recta.



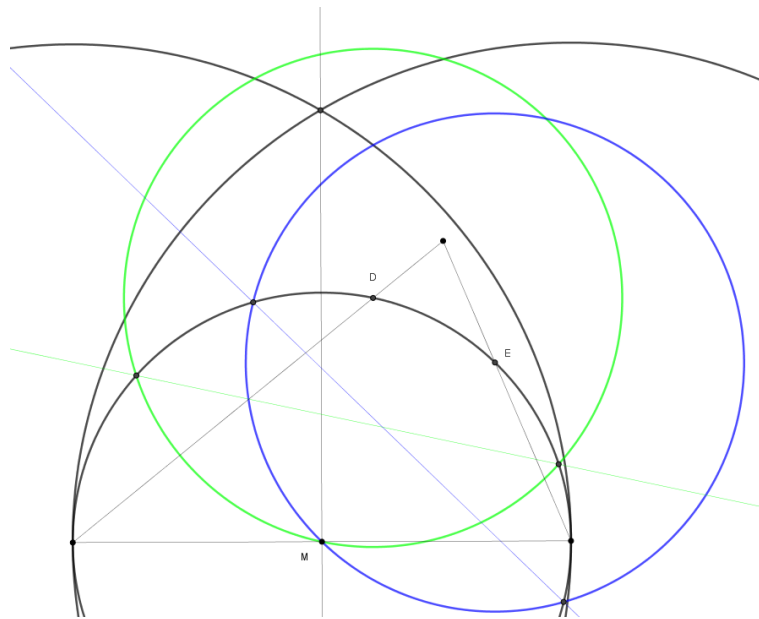
- iii) Tracem la circumferència de centre el punt mig i diàmetre el costat, amb un moviment més. Els punts de tall amb els altres costats formen angles de 90° i, per tant, són els peus de les altures. En conseqüència, ja tenim tres punts del cercle que busquem.



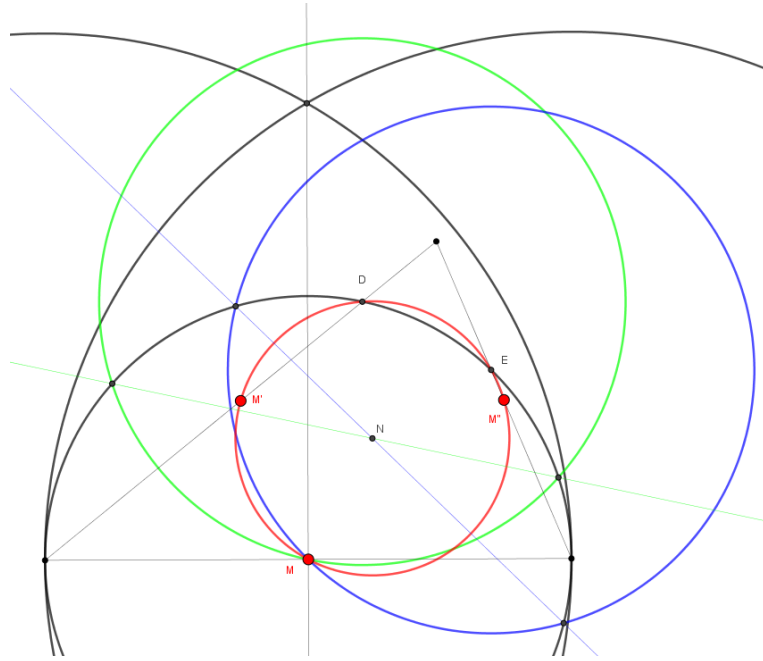
- iv) Amb els tres punts que tenim, ja podem trobar el centre del cercle. Per fer-ho tracem primer la mediatriu d'una de les cordes (DM), aprofitant una circumferència de manera que només fem dos moviments.



v) Tracem la mediatriu d'una altra corda (EM), aprofitant de nou una circumferència de manera que només fem dos moviments.



vi) El punt de tall de les mediatrius de les cordes és el centre del cercle, per tant el tracem amb un moviment més.



Tal com hem dit, aquest és el cercle dels 9 punts i, per tant, passa pels punts mitjos dels tres costats del triangle. A més a més, ho hem fet amb $3 + 1 + 2 + 2 + 1 = 9$ moviments, així que hem acabat.