XXIV Marató de Problemes

Mamadísimos, 2 de maig de 2020

Bloc VI - Si enteneu l'enunciat, ja està bé

1111. Quan la carrera era difícil.

L'Óscar Rivero troba a faltar l'antigua llicenciatura, argumentant que: "Ahora los problemas son tan fáciles que cuando se los cuento a mi abuela, se me queda dormida!". Repassant exàmens de l'antiga llicenciatura, es troba amb un examen parcial d'Anàlisi Complexa, en quà un problema venia amb la següent indicació:

Observació: aquest problema pot resultar difícil. Indiqueu al menys quin camí seguiríeu.

Sereu capaços de resoldre'l? El problema demana demostrar que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+i}}$$

és divergent.

Solució. En primer lloc, tenim que

$$\frac{1}{n^{1+i}} = n^{-1-i} = e^{(-1-i)\ln(n)} = e^{-\ln(n)}e^{-i\ln(n)} =$$

$$= \frac{1}{n}(\cos(-\ln(n)) + i\sin(-\ln(n))) = \frac{1}{n}(\cos(\ln(n)) - i\sin(\ln(n)))$$

Per tant, la nostra suma és:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+i}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\ln(n)) - i\sin(\ln(n))}{n}$$

Per tal de veure que no convergeix, veurem que la part real no convergeix, és a dir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$$

no convergeix. Si fos convergent, la sèries de sumes parcials $s_m = \sum_{n=1}^{m} \dfrac{\cos(\ln(n))}{n}$ seria de Cauchy i per tant, $\forall \varepsilon$ existiria n_0 tal que si $n, m \geq n_0$ tindríem $|s_m - s_n| < \varepsilon$. Veurem que això no passa. En particular, que per $\varepsilon = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ i per tot n_0, existeixen $n, m \geq n_0$ tals que $|s_m - s_n| \geq \varepsilon$.

Per cada valor de k sigui $M_k = e^{2\pi k - \frac{\pi}{4}}$. Aleshores tenim que $e^{2\pi k - \frac{\pi}{8}} = e^{2\pi k - \frac{\pi}{4}} e^{\frac{\pi}{8}} = M_k e^{\frac{\pi}{8}} > \frac{10}{7} M_k$. Sigui n_k l'enter més petit tal que $n_k > M_k$. Aleshores sabem que l'interval $[e^{2\pi k - \frac{\pi}{4}}, e^{2\pi k - \frac{\pi}{8}}]$ té longitud major que $\frac{10}{7}M_k - M_k = \frac{3}{7}M_k$. I si $k \geq 1$, M_k serà més gran que 7, i l'interval esmentat serà de longitud major que $\frac{3}{7} \cdot 7 = 3$. Això vol dir que existeixen almenys 2 enters en aquest interval, i per tant n_k està en aquest interval per la seva definició.

Com $n_k < e^{2\pi k - \frac{\pi}{4}} e^{\frac{\pi}{8}}$, $2n_k < 2e^{2\pi k - \frac{\pi}{4}} e^{\frac{\pi}{8}} < e^{2\pi k - \frac{\pi}{4}} e^{\frac{\pi}{8}} e^{\frac{\pi}{4}} = e^{2\pi k} e^{\frac{\pi}{8}}$ ja que $2 < e^{\pi/4} = 2.19...$. Per tant, prenent logaritmes, tenim que $2\pi k - \frac{\pi}{4} \leq \ln(n_k) < \ln(2n_k) = \ln(n_k) + ln(2) < 2\pi k + \frac{\pi}{8}$ i com el logaritme és creixent, deduïm que per tots els valors enters en $[n_k, 2n_k]$ el logaritme està entre $2\pi k - \frac{\pi}{4}$ i $2\pi k + \frac{\pi}{8}$. Ara bé, quan fem el cosinus d'aquests valors $\ln(n)$ per $n \in [n_k, 2n_k]$, el cosinus estarà entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ i 1 perquè l'argument estarà entre $-\frac{\pi}{4}$ i $\frac{\pi}{8}$. Per tant tenim:

$$\sum_{n=n_k}^{2n_k} \frac{\cos(\ln(n))}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=n_k}^{2n_k} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=n_k}^{2n_k} \frac{1}{2n_k} > \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

És a dir, que $\forall k \in \mathbb{N}_{>0}$ $|s_{n_{2k}} - s_{n_k}| > \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Com que per tot $n_0 \in \mathbb{N}$ existeix $n_k > n_0$ la successió no pot ser de Cauchy i hem acabat.