XXIV Marató de Problemes

Mamadísimos, 2 de maig de 2020

Bloc VI - Si enteneu l'enunciat, ja està bé

1216. No me vas a hacer el feo!

L'Ernesto avui surt de festa i, com sempre, li tocarà comprar l'alcohol per tothom. En total n persones sortiran de festa i l'Ernesto comprarà m ampolles d'alcohol. Ara bé, com que l'Ernesto sempre es passa tres pobles amb l'alcohol i t'acaba pressionant per a que beguis amb expressions del tipus "Otro chupito de pacharán, no me vas a hacer el feo!", la resta de gent decideix posar les normes següents: de cada ampolla en beurà un nombre senar de persones i donades dues ampolles diferents, un nombre parell de persones beuran de totes dues ampolles. Podeu demostrar que hi haurà com a molt una ampolla per persona (o sigui $m \leq n$)?

Solució. Enumerem les persones de l'1 a l'n i les ampolles de l'1 al m. Per cada $i = 1, \ldots, m$, considerem els vectors $v_i \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ on la j-èssima component és 1 si la persona j beu de l'ampolla i, i 0 en cas contrari.

Si considerem l'espai vectorial $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ sobre el cos $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, com a molt podem tenir n vectors linealment independents, per tant, si veiem que amb les condicions donades els vectors $v_1, v_2, \ldots, v_m$ han de ser linealment independents, forçosament tindrem $m \leq n$.

Vegem-ho per contradicció: Suposem que existeix un conjunt de vectors linealment dependents. És a dir, que existeixen $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$ i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \{0, 1\}$ tals que $\lambda_1 v_{i_1} + \lambda_2 v_{i_2} + \ldots + \lambda_k v_{i_k} = 0$ i no tots els λ_j són 0. Aleshores si seleccionem els λ_j que són 1 amb els seus corresponents v_{i_j}, existeixen $u_1, u_2, \ldots, u_l \in \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$ $(l > 0)$ tals que $u_1 + u_2 + \ldots + u_l = 0$ com a vector de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Multipliquem ara escalarment els dos costats de la igualtat per u_1, on el producte escalar és la suma dels productes component a component mòdul 2 (és clarament bilineal). Aleshores $\langle u_1 + u_2 + \ldots + u_l, u_1 \rangle = \langle u_1, u_1 \rangle + \langle u_2, u_1 \rangle + \ldots + \langle u_l, u_1 \rangle = \langle 0, u_1 \rangle = 0$. Però si $i \neq 1$, $\langle u_i, u_1 \rangle = 0$ ja que hi ha un nombre parell de components dels vectors que són 1 en els dos (per la condició que donades dues ampolles diferents, un nombre parell de persones beuen de les dues). Però $\langle u_1, u_1 \rangle = 1$ perquè un nombre senar de components són 1 (per la condició que de una ampolla beuen un nombre senar de persones). Així doncs a la igualtat anterior arribem a $1 = 0$ en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que és clarament una contradicció. Per tant, els vectors són tots linealment independents i com la dimensió de l'espai és n, n'hi ha com a molt n i $m \leq n$, com volíem.