XXIV Marató de Problemes

Mamadísimos, 2 de maig de 2020

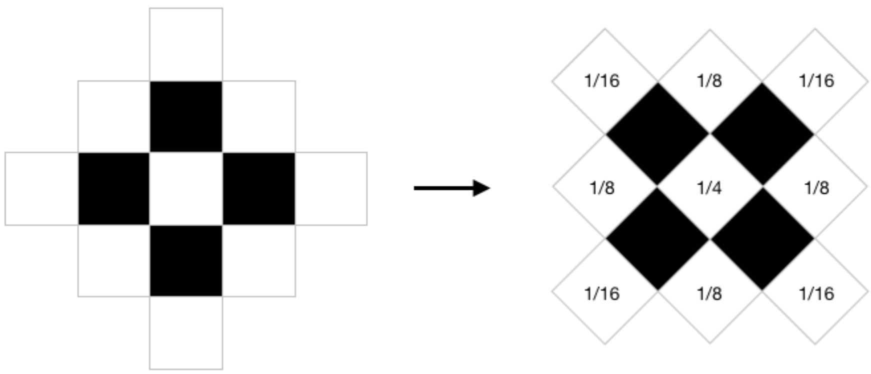
Bloc VI - Si enteneu l'enunciat, ja està bé

1648. Entrena ments

En Miquel està pensant un problema en un entrenament del Roura. Quan pensa els problemes, sempre fa passes erràticament movent-se per la sala i no s'atura fins que ha trobat la solució del problema. A més, té la mania d'alternar amb quina cama comença les passes: dreta, esquerra, dreta, esquerra... i només pot acabar quan ha començat el mateix nombre de passes amb la dreta que amb l'esquerra (si no, quedaria descompensat i li entraria TOC). A més, en Miquel necessita fer almenys una passa (de fet, almenys dues perquè després haurà de fer-ne una altra amb l'altra cama) per poder trobar la solució d'un problema (i si no resol problemes, el Roura no el deixa berenar).

Podem imaginar la sala com una quadrícula infinita amb en Miquel al centre. En total fa $2n$ passes ($n \geq 1$) i a cada instant es pot moure equiprobablement amunt, avall, a la dreta o a l'esquerra. Proveu que la probabilitat que en Miquel acabi a dues o menys passes d'on ha començat es pot expressar com $\frac{a^2}{b^2}$ amb $a, b \in \mathbb{N}$.

Solució. Si pintem el terra com un tauler d'escacs, i suposant sense pèrdua de generalitat que en Miquel comença en una casella blanca, podem agrupar les seves passes de dos en dos de manera que al final de cada grup de dues passes es troba en una casella blanca (podem fer-ho perquè el nombre total de passes és parell). Tenim doncs que podem prescindir de les caselles negres, i rotant la nostra visió del terra 45°, podem veure les caselles blanca com una nova quadrícula infinita, on ara els moviments permesos són a qualsevol de les 9 caselles adjacents, inclosa la casella actual, amb les probabilitats que es veuen a la figura (que es poden calcular a partir del nombre de parelles de passes que arriben a cada casella).



Considerem les variables aleatòries X_i, Y_i per $i = 1, \ldots, n$, que representen el desplaçament en les direccions X i Y del pla en la passa i, entesos en aquest nou punt de vista del problema, i per tant prendran els valors:

$$X_i = \begin{cases} -1 & \text{amb probabilitat } \frac{1}{4} \\ 0 & \text{amb probabilitat } \frac{1}{2} \\ 1 & \text{amb probabilitat } \frac{1}{4} \end{cases} \qquad Y_i = \begin{cases} -1 & \text{amb probabilitat } \frac{1}{4} \\ 0 & \text{amb probabilitat } \frac{1}{2} \\ 1 & \text{amb probabilitat } \frac{1}{4} \end{cases}$$

Les variables aleatòries X_i i Y_i són independents ja que el producte de probabilitats és la probabilitat de la intersecció, perquè si multipliquem el vector $v = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})^T$ pel seu transpòs obtenim la matriu de probabilitats de la figura anterior.

A més, les variables aleatòries X_i i Y_j amb $i \neq j$ són també independents trivialment. Considerem les variables aleatòries $X = X_1 + \cdots + X_n$, $Y = Y_1 + \cdots + Y_n$. De les relacions d'independència anteriors, deduïm que X i Y són independents. Notem però que la probabilitat que se'ns demana calcular és equivalent en aquest nou punt del vista del problema a $p(|X| \leq 1) \cap p(|Y| \leq 1)$, però donat que X i Y són independents i idènticament distribuïdes tenim:

$$p(|X| \leq 1, |Y| \leq 1) = p(|X| \leq 1)p(|Y| \leq 1) = p(|X| \leq 1)^2$$

Així doncs, només cal provar que $p(|X| \leq 1)$ és un nombre racional i ja haurem acabat. Però de fet, donat que el nombre de passes és finit, la probabilitat d'acabar en una casella (considerant ara només moviment en la direcció X) és la suma de les probabilitats de cadascun dels camins que acaben en aquesta casella. Però aquestes probabilitats són racionals (per ser producte finit de racionals), i per tant la suma d'elles també és racional. Per últim, la probabilitat de l'esdeveniment $|X| \leq 1$ és la suma de les probabilitats d'acabar en les caselles -1, 0 o 1, que pel mateix argument es tracta d'un nombre racional. Sembla ser que aquí l'únic irracional que hi ha és en Miquel!