Problema 2434 (Jordi Pesao)

Sí pot ser connex. L'exemple és $f(t) = (\arctan(t), t\sin(t))$, que es veu senzillament que no és fitada.

Per demostrar que el complementari de la seva imatge (A) és connex, demostrarem primer que els quatre conjunts d'$\mathbb{R}^2$

$$\{(x,y)|x < -\frac{\pi}{2}\}, \{(x,y)|x > \frac{\pi}{2}, \}$$

$$\{(x,y)|x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), y < \tan(x)\cdot\sin(\tan(x))\}$$

$$\{(x,y)|x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), y > \tan(x)\cdot\sin(\tan(x))\}$$

Són oberts conexos (tant vistos com a subespais d'$\mathbb{R}^2$ com com a subespais del complementari de la imatge). Els primers dos estan clars.

El tercer és un obert per ser l'antiimatge del conjunt obert $\{(x,y)|x \in x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), y < 0\}$ sota l'aplicació contínua $g(x,y) = (x, y - \tan(x)\cdot\sin(\tan(x)))$ i és connex per ésser la imatge del mateix conjunt (també connex) per l'aplicació continua $g(x,y) = (x, y + \tan(x)\cdot\sin(\tan(x)))$. Anàlogament, el quart conjunt és obert i connex.

Observem que aquest quatre conjunts, junt amb les rectes $x = \pm\frac{\pi}{2}$, formen una partició de A. Suposem que A no és connex, és a dir, que tenim $A = U_1 \sqcup U_2$ amb U_1, U_2 oberts disjunts no buits o totals. Per a qualsevol dels oberts conexos anteriors, tenim que $U = (U_1 \cap U) \sqcup (U_2 \cap U)$, i com U és connex tenim que U ha d'estar completament contingut a U_1 o U_2.

Suposem que U_1 conté algun punt de la recta $x = -\frac{\pi}{2}$. Qualsevol bola centrada en un punt d'aquesta recta conté punts del primer, tercer i quart oberts connexos d'abans. Per tant U_1 ha de contenir aquest tres oberts. Ara U_2 no pot contenir cap punt de qualsevol de les dues rectes (ja que si ho continguera també hauria de contenir el tercer i quart obert) i per tant U_1 conté les dues rectes i per tant és el total, contradicció.