XXIV Marató de Problemes. Problema 3298

Jordi Pesao

May 2, 2020

Demostrem primer que l'origen no pertany a la corba: Parametritzem la corba, que anomenarem c, per $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$. Clarament la corba pot passar un sol cop com a molt per l'origen, ja que si no la corba no seria simple per no ser injectiva. El teorema de la corba de Jordan ens diu que c separa el pla en dos components connexes obertes en el pla (i per tant arc-connexes), una interior I i una exterior E. Assumim que l'origen pertnany a la corba. Prenem $x \in I$. Per simetria, $-x \in I$. Per arcconexió, x i $-x$ estan connectats per una corva $z \in I$, i per simetria, $-z$ (la corba que conté els punts oposats als de z) també. Fixem-nos que unir z i $-z$ ens crea una corba tancada Z que pertany a I. Usem de nou el teorema de la corba de Jordan, que ens generarà dos components I' i E'. Fixem-nos que l'origen pertany a l'interior de I', però prenent una bola prou petita entorn l'origen, I' tindrà punts de E, ja que qualsevol entorn de l'origen tindrà punts de I i de E per pertànyer aquest a la corba c. Sigui e un d'aquests punts. Per tant, Z està separant e respecte E, que conté E'. Això contradiu que E és connexa.

Sigui $R(v)$ un automorfisme en els reals definit per $R(x, y) = (-y, x)$, és a dir, R correspon a girar 90 graus en sentit antihorari. Pintem la nostra corba c de color vermell. Ara fem una copia de c, anomenem-la c', pintem-la ara de blau, i rotem-la 90 graus en sentit antihorari. c' la podrem parametritzar per $\gamma'(t) = R(\gamma(t))$.

Demostrem que les dues corbes intersequen en almenys un punt. Sigui $M = \max_{x \in S^1} |\gamma(t)|$ (aquest màxim existeix per Weierstrauss ja que S^1 és compacte). Clarament R preserva mòduls, i per tant $M = \max_{x \in S^1} |\gamma'(t)|$. Suposem que no intersequen. Llavors c' és continua a $\mathbb{R}^2 \setminus c$. Pel teorema de la corba de Jordan, aquest conjunt consta de dos components connexes, una interior fitada I i una exterior no fitada E. Com que c' és la imatge d'un connex per una funció continua, ha de pertànyer a una d'aquestes dues components. Suposem WLOG que pertany a I. Clarament l'interior de I està contingut a B_M, la bola de radi M centrada a l'origen. Però hi ha un valor t_0 pel que $|\gamma'(t_0)| = M$, cosa que aquest punt està a I però no a l'interior. Com I és connex, ha d'estar a la frontera, però la frontera de I és c, i arribem a una contradicció.

Per tant tenim un punt vermell p tal que $q = R(p)$ és un punt blau i vermell (com el Barça jejejeje), Per tant, per simetria, $p, q, -p, i - q$ estan pintats de vermell (és a dir, són 4 punts de c) i són els vèrtexos d'un quadrat, com volíem veure.