

## 823. Pensment racional

Egretta Garzetta

1 de maig de 2020

Demostrem que és possible expressar qualsevol nombre racional positiu com a quocient de productes de factorials de nombres primers.

**Lemma 1.** *Qualsevol número primer es pot expressar com a quocient de productes de factorials de nombres primers*

*Demostració.* Provem el lemma per inducció forta sobre el conjunts dels primers.

Clarament el cas base  $n = 2$  es compleix ja que  $2 = 2!$

Passem al pas inductiu. Sigui  $p_k$  el  $k$ -èssim primer i sigui l'enunciat del lemma cert per als  $k - 1$  primers anteriors. Aleshores tenim que:

$$p_k = \frac{p_k!}{(p_k - 1)!}$$

Clarament  $(p_k - 1)!$  és producte de primers menors que  $p_k$ . Conseqüentment, per hipòtesi d'inducció, tenim que  $(p_k - 1)!$  es pot expressar com a quocient de productes de primers (per ser el quocient de quocients de productes de factorials de primers un quocient de productes de factorials de primers).  $\square$

Finalment, tenim que tot número racional positiu es pot expressar com a producte de primers, aplicant el *lemma 1* tenim que tot nombre racional es pot expressar com a quocient de productes de factorials de primers.