XXIV Marató de Problemes

Mamadísimos, 3 de maig de 2020

Bloc VII - No ploreu

1495. Problemes d'identitat

En Pep Burillo ha posat un nou entregable, que diu el següent: "Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una bijecció satisfent que:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $f(xy) = f(x)f(y)$

per a tot $x, y \in \mathbb{R}$. Demostreu que $f(x) = x$". L'Ángela està tenint alguns problemes per resoldre l'entregable, la podeu ajudar?

(Bastant) més tard, arriba el Gimó i afirma que el resultat també és cert si se substitueix la segona condició per $f(1) = 1$. Té raó?

Solució. Ángela)

Substituint $x = y = 0$ a la primera equació obtenim $f(0) = 2f(0)$, així que $f(0) = 0$. Ara substituint $x = y = 1$ a la segona, obtenim $f(1) = f(1)f(1)$. Com que f és una bijecció, $f(1) \neq 0$ (perquè $f(0) = 0$) i podem dividir a cada banda per $f(1)$ per obtenir $f(1) = 1$. El següent pas és veure que $f(n) = n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Ho farem per inducció.

Per $n = 0, 1$ ja hem vist que és cert, és a dir, els casos base funcionen. Ara suposem que $f(n) = n$ i veiem $f(n + 1) = n + 1$. Posant $x = n$, $y = 1$ a la primera equació tenim que $f(n + 1) = f(n) + 1 = n + 1$ on la última igualtat és certa per hipòtesi d'inducció. Aleshores hem vist que si el resultat és cert per n, ho és per $n + 1$ i com es compleix pels casos base, pel principi d'inducció matemàtica, és cert $\forall n \in \mathbb{N}$.

El següent pas és veure que $f(q) = q \ \forall q \in \mathbb{Q}^+$. Posant $x = n$, $y = \frac{1}{n}$ per $in\mathbb{N}$ a la segona equació, arribem a $1 = f(n \cdot \frac{1}{n}) = f(n)f(\frac{1}{n}) = n \cdot f(\frac{1}{n})$ i per tant $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$. Ara, substituint $x = p$, $y = \frac{1}{q}$ amb $p, q \in \mathbb{N}$ a la segona equació, obtenim: $f(\frac{p}{q}) = f(p)f(\frac{1}{q}) = \frac{p}{q}$. Com qualsevol racional positiu pot escriure's de la forma $\frac{p}{q}$ amb $p, q \in \mathbb{N}$ tenim que $f(x) = x$ per tot racional positiu (i pel 0 també). Ara posant a la primera equació $x = z$, $y = -z$, pe $z \in \mathbb{R}$ obtenim $0 = f(0) = f(z) + f(-z)$ i per tant, $f(x) = -f(-x)$ per tot $x \in \mathbb{R}$. Posant ara $x = -\frac{p}{q}$ en aquesta última per $p, q \in \mathbb{N}$, obtenim: $f(-\frac{p}{q}) = -f(\frac{p}{q}) = -\frac{p}{q}$. I per tant, $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{Q}$.

Ara considerem un real positiu qualsevol z i posem $x = y = \sqrt{z}$ a la segona equació. Obtenim $f(z) = f(\sqrt{z})^2 > 0$ ja que no pot ser igual a 0 perquè f és una bijecció i $f(0) = 0$. Ara, si tenim $a > b$, posant a la primera equació $x = b$, $y = a - b > 0$ trobem $f(a) = f(b) + f(a - b) > f(b)$ ja que $a - b > 0$ i hem vist que tot positiu dóna imatge positiva. Per tant, com $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a > b \implies f(a) > f(b)$, tenim que f és estrictament creixent.

Acabem veient que $f(x) = x$ per tot real x. Suposem que no és així i que existeix z tal que $f(z) \neq z$. Si $f(z) > z$, aleshores com entre qualsevols 2 reals hi ha un racional, $\exists q \in \mathbb{Q} \cap (z, f(z))$ tal que $f(q) = q$. Però com $q > z \implies f(q) > f(z)$ i tenim $f(q) = q < f(z)$ i ens trobem amb una contradicció. De manera similar podem fer l'altre cas.

Si $f(z) < z$, aleshores com entre qualsevols 2 reals hi ha un racional, $\exists q \in \mathbb{Q} \cap (f(z), z)$ tal que $f(q) = q$. Però com $q < z \implies f(q) < f(z)$ i tenim $f(q) = q > f(z)$ i ens trobem amb una contradicció.

Per tant, no pot existir tal z i $f(x) = x$ per tot $x \in \mathbb{R}$ és la única solució. Es comprova substituint aquesta funció a les dues equacions, que és realment solució.

Gimó) No tens raó, Gimó, sempre que assumim cert l'axioma d'elecció. De fet, considerem una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$ vist com a $\mathbb{Q}$-espai vectorial, amb l'1 com a representant de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, i sigui $\mathcal{V} = \langle \mathcal{B} \backslash \{1\} \rangle$, el subespai vectorial generat per la base menys l'element 1. Aleshores $\mathbb{R} = \langle \{1\} \rangle \oplus \langle \mathcal{B} \backslash \{1\} \rangle = \mathbb{Q} \oplus \mathcal{V}$. Considerem la funció f tal que, per cada $x = q + v \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(q + v) = q - v$$

Vegem que aquesta funció està ben definida, és bijectiva i satisfà les condicions $f(x + y) = f(x) + f(y)$ i $f(1) = 1$, però f no és la identitat. De fet

- f està **ben definida**, perquè la descomposició de tot element com a suma d'un element de $\mathbb{Q}$ i un de $\mathcal{V}$ és única, ja que la suma és directa.
- f és **bijectiva**. És immediat, ja que es pot comprovar fàcilment que és inversa d'ella mateixa: $f(f(q + v)) = f(q - v) = q + v$.
- f és **lineal amb la suma**. Si $x, y \in \mathbb{R}$ amb $x = q_1 + v_1$ i $y = q_2 + v_2$, aleshores:

  $$f(x + y) = f(q_1 + v_1 + q_2 + v_2) = q_1 + q_2 - (v_1 + v_2) = (q_1 - v_1) + (q_2 - v_2) = f(x) + f(y)$$

- f satisfà la **condició del Gimó**. Clarament, $f(1) = f(1 + 0) = 1 - 0 = 1$.

No obstant, $f(x) \neq x$ per tot $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, i per tant el Gimó s'equivoca.