P2224 (Jordi Pesao)

May 2, 2020

La demostración visual para $n = 2, 3$ está en el vídeo, aunque más abajo está de nuevo rigurosamente. Para n en general me ayudaré de la siguiente abstracción para representar los lazos sobre los clavos. En lo que sigue asumiré sin pérdida de generalidad que el cordel comienza sobre el lado izquierdo más alejado de los clavos. Sea x_i un giro horario sobre el clavo i y x_i^{-1} un giro antihorario de lazo sobre el mismo clavo. Ahora podemos representar de forma unívoca cualquier forma de poner el cordel sobre los clavos con los símbolos x_i, x_i^{-1}. Por ejemplo, la forma tradicional de colgar un cuadro con un clavo sería x_1, y con dos clavos sería $x_1 x_2$.

Veámos ahora cuales son las posibles cancelaciones de elementos. Obviamente $x_i x_i^{-1}$ es igual que no hacer nada pues giras y luego "desgiras" y por tanto se puede cancelar, es decir, $x_1 x_2 x_2^{-1} x_1^{-1} = x_1 x_1^{-1} =$ "Se cae". Y de hecho, esas son las únicas cancelaciones posibles. Ya que $x_i x_j$, $x_i^{-1} x_j$, $x_i x_j^{-1}$, $x_i^{-1} x_j^{-1}$ si $i \neq j$ forman un entrelazado entre dos clavos no trivial que no se puede separar, en concreto como dije antes $x_i x_j$ es la forma tradicional para dos clavos y las otras tres es añadir lazos a esta.

Dicho esto, basta encontrar una composición de x_i, x_i^{-1} tal que no sea igual a la identidad pero si quitas uno cualquiera sí lo sea. Para $n = 2$, denotaré por $S_2 = [x_1, x_2] = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$ la solución al problema, que es correcta pues no se puede cancelar nada pero si quitas cualquiera de los dos clavos el otro se cancela y se cae. Para generar el resto lo haré de forma inductiva. Sea S_n la solución al n-ésimo caso. Entonces, $S_{n+1} = [S_n, x_{n+1}] = S_n x_{n+1} S_n^{-1} x_{n+1}^{-1}$ es una solución al $n+1$-ésimo caso. Basta ver que si quitas el clavo $n+1$ te queda $S_n S_n^{-1} = Id$ y si quitas cualquier otro entonces $S_n \to Id$ y te quedará solo $x_{n+1} x_{n+1}^{-1} = Id$ justo como queríamos. Para hallar como es S_n^{-1} solo hay que usar que $(x_i x_j)^{-1} = x_j^{-1} x_i^{-1}$ y que $(x_i^{-1})^{-1} = x_i$. A modo de ilustración se muestra el caso $n = 3$ con la fórmula que se usó para hacer el vídeo: $x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1}$