P4450 (Jordi Pesao)

May 2, 2020

Observamos que la notación parece indicar que es la derivada un medio. Por tanto, parece razonable asumir que el resultado sera $Df(x) = \frac{df}{dx}(x)$. Primero, veámos una definición similar de integral un medio y diversas propiedades entre ambos.

$$I^{\frac{1}{2}}f(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt \tag{1}$$

$$(I^{\frac{1}{2}}(I^{\frac{1}{2}}f))(x) = (If)(x) = \int_0^x f(t)dt \tag{2}$$

$$(D^{\frac{1}{2}}f)(x) = (\frac{d}{dx}(I^{\frac{1}{2}}f))(x) = (D(I^{\frac{1}{2}}f))(x) \tag{3}$$

$$(D^{\frac{1}{2}}(I^{\frac{1}{2}}(f))(x) = f(x) \tag{4}$$

$$(I^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}(f))(x) = f(x) \tag{5}$$

La propiedad (3) se deduce directamente de la definición. Para las demás vayamos paso a paso.

Propiedad 2.

$$\begin{aligned}(I^{\frac{1}{2}}(I^{\frac{1}{2}}f))(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}(I^{\frac{1}{2}}f)(x)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}f(s)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^x\int_0^t (x-t)^{-\frac{1}{2}}(t-s)^{-\frac{1}{2}}f(s)dsdt = \frac{1}{\pi}\int_0^x f(s)\int_s^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}(t-s)^{-\frac{1}{2}}dtds\end{aligned}$$

En el último paso hemos aplicado el teorema de Fubini para intercambiar las integrales. Ahora evaluaremos la integral del interior multiplicando y dividiendo por $(x-s)^{-\frac{1}{2}}$, y haciendo el cambio de variable $r = \frac{t-s}{x-s}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^x f(s)\int_s^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}(t-s)^{-\frac{1}{2}}dtds &= \frac{1}{\pi}\int_0^x f(s)\int_s^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(x-s)^{-\frac{1}{2}}}\frac{(t-s)^{-\frac{1}{2}}}{(x-s)^{-\frac{1}{2}}}(x-s)^{-1}dtds \\ = \frac{1}{\pi}\int_0^x f(s)\int_0^1 (1-r)^{-\frac{1}{2}}r^{-\frac{1}{2}}drdt &= \int_0^x f(s)ds = (If)(x)\end{aligned}$$

donde se ha aplicado que $\int_0^1 (1-r)^{-\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}} dr = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi$.

Propiedad 4. Usando la propiedad 3 y la propiedad 2 queda:

$$(D^{\frac{1}{2}}(I^{\frac{1}{2}}(f)))(x) = (D(I^{\frac{1}{2}}(I^{\frac{1}{2}}(f))))(x) = (D(I(f)))(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(t)$$

donde la última igualdad es el teorema fundamental del Cálculo.

Propiedad 5. Esta propiedad requiere de que f tenga un "potencial integral un medio", o lo que es lo mismo, que exista φ tal que $f(x) = (I^{\frac{1}{2}}\varphi)(x)$. Pero esta propiedad se deduce que f es "suficientemente diferenciable" por el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}
&(I^{\frac{1}{2}}f)(x) = \int_0^t \frac{d}{ds}(I^{\frac{1}{2}}f)(s)ds := \int_0^t \varphi dt \\
&\Rightarrow I^{\frac{1}{2}}f \equiv I\varphi \equiv I^{\frac{1}{2}}(I^{\frac{1}{2}}\varphi) \\
&\Rightarrow I^{\frac{1}{2}}(f - I^{\frac{1}{2}}\varphi) \equiv 0 \\
&\Rightarrow f \equiv I^{\frac{1}{2}}\varphi
\end{aligned}$$

Nos ha quedado una ecuación integral y si añades "suficiente diferenciabilidad" tendrá solución única, es decir el 0. También se ha usado que todos los operadores aquí presente son lineales. Para acabar esta propiedad razonaremos como sigue:

$$I^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}f) \equiv I^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}(I^{\frac{1}{2}}\varphi)) \equiv I^{\frac{1}{2}}\varphi \equiv f$$

donde se ha usado la propiedad 4.

Conclusión final. Sea $g(x) = (D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}f))(x)$, entonces por la propiedad 5 y la propiedad 2, $f(x) = (I^{\frac{1}{2}}(I^{\frac{1}{2}}(g))(x) = (Ig)(x)$. Aplicando el teorema fundamental del cálculo queda finalmente:

$$(Df)(x) = g(x) = (D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}f))(x)$$

Y todo cuadra como Dios manda.