10. Torre de πsa

Si

$$T_n(x) = x^{T_{n-1}(x)} \quad \forall n > 1 \qquad T_1(x) = x$$

Existeix

$$\lim_{n\to\infty} T_n\left(\pi^{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}}\right)$$

? Si existeix, quin valor té?

Nota: la torre de Pisa esta a França no?

Si existeix, i val $\sqrt{\pi}$. Primer, notem el següent:

$$\pi^{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}} = \left(\pi^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} = \left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}$$

Definim $T_n := T_n\left(\pi^{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}}\right)$. A la propietat següent li direm (1): $\left(\left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}\right)^x$ és creixent; i és així perquè $\left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} > 1$ (ho veiem en breus).

Vegem per inducció que $1 < T_n \leq \sqrt{\pi}$.

- Cas base, n=1: $1 < \left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} \leq \sqrt{\pi}$.

  $\sqrt{\pi} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} > 0 \Rightarrow \left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} > \left(\sqrt{\pi}\right)^0 = 1$, per (1).

  $\sqrt{\pi} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} < 1 \Rightarrow \left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} < \sqrt{\pi}$, per (1) també.

- Cas general, $n \Rightarrow n+1$:

  $T_{n+1} = \left(\left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}\right)^{T_n}$, com $1 < \left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}$ i (1) així que $T_{n+1} = \left(\left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}\right)^{T_n} \leq \left(\left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}\right)^{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi}$

Demostrem ara que T_n és una successió estrictament creixent:

- Cas base, n=1:

  Ara sabem que $1 < \left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}$, usant (1) tenim $\left(\left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}\right)^{\left(\left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}\right)} > \left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}$, és a dir, $T_2 > T_1$.
- Cas general, $n > n-1 \Rightarrow n+1 > n$:
  $T_n > T_{n-1} \Rightarrow \left(\left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}\right)^{T_n} = T_{n+1} > \left(\left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}\right)^{T_{n-1}} = T_n$

Tenim una successió de nombres reals positius estrictament creixent i acotada superiorment, per tant existeix límit, i és únic. Veiem que aquest és $\sqrt{\pi}$. Primer cal notar que és solució de l'ecuació

$$L = \left(\left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}\right)^{L}$$

Ara, és l'única solució? La realitat és que no. La funció $x^{\frac{1}{x}}$ és creixent a $(0, e)$, té un màxim a e, i és decreixent a (e, ∞), i $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$. Això implica que l'equació anterior tindrà exactament dues solucions, $\sqrt{\pi}$ i una altra. Però $\pi < 4 \Rightarrow \sqrt{\pi} < 2 < e$, així que l'altra solució L_2 ha d'estar a (e, ∞) i és estrictament major. Però no pot ser l'altra, ja que hem demostrat anteriorment que $T_n < \sqrt{\pi} \quad \forall n \Rightarrow \exists \epsilon > 0 \quad t.q \quad T_n < L_2 - \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T_n \neq L_2$.