XXV Marató de Problemes

Parc Juràssic: Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Martí Oller i Miquel Ortega

3. Bolsa no, gracias

El Donato, que està molt preocupat pel medi ambient, sempre porta una bossa de tela quan va a comprar al Carrefour Express. Tot i això, el caixer sempre li pregunta: "Quiere bolsa, amigo?". Amb el temps que ha hagut de dedicar a respondre: "Bolsa no, gracias", podria haver resolt el següent problema:

Sigui $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció derivable, no necessàriament $\mathcal{C}^1([a, b])$. Proveu que, si $f'(a)f'(b) < 0$, aleshores existeix $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.

Resolució. Podem suposar que $f'(a) > 0$ i $f'(b) < 0$. En cas contrari, podem prendre $g = -f$ i reduir el problema al cas suposat.

Com f és contínua a l'interval tancat $[a, b]$, assoleix el màxim a l'interval. Si $f(a)$ fos el màxim de la funció, tindríem que

$$f'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0,$$

una contradicció. Anàlogament, no pot assolir el màxim a b. Per tant, assoleix el màxim a un punt $\xi \in (a, b)$, que necessàriament satisfà $f'(\xi) = 0$ per ser un extrem a l'interior.

Apatosaure