XXV Marató de Problemes

Els Problemàtics

Problema 4 (algorisme)

Donades les condicions dels coeficients de la matriu (uns a la primera fila i columna i $a_{ij} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}$ per $i, j > 1$) tenim la següent matriu de mida n:

$$A_n = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n+1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-2}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{2n-3}{n-1} \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{2} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{pmatrix}$$

Ara, modificarem la matriu A_n fent la transformació $F_i \leftarrow F_i - F_{i-1}\ \ \forall i = 2, \ldots, n$ i utilitzant la regla de Pascal

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Tot i això, com que és l'assignatura preferida de més del 80% d'alumnes de la FME, no podia faltar una resolució a l'estil Àlgebra Lineal Numèrica. Per tant, apliquem l'algoritme 1 per tal d'obtenir una matriu triangular superior.

Algorithm 1: (A1)

Result: Matriu triangular superior
for $k = 2, \ldots, n$ **do**
  for $i=k, \ldots, n$ **do**
    $F_i \leftarrow F_i - F_{i-1}$**end**
  end

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \\ 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n-1}{n-2} \\ 0 & \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \binom{n-2}{0} & \binom{n-1}{1} & \cdots & \binom{2n-4}{n-2} \\ 0 & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{2n-3}{n-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{A1} \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & \binom{n-2}{n-2} & \binom{n-1}{n-1} \\ 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n-2}{n-3} & \binom{n-1}{n-2} \\ 0 & 0 & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n-2}{n-4} & \binom{n-1}{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n-2}{0} & \binom{n-1}{1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n-1}{0} \end{pmatrix}$$

Ara, sabem que les transformacions elementals consistents en restar una fila per una altra no modifiquen el determinant i, com que el determinant d'una matriu triangular superior és el producte dels coeficients de la diagonal i $\binom{k}{0} = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$, tenim:

$$\det A_n = \binom{0}{0}\binom{1}{0}\cdots\binom{n-1}{0} = 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1 \quad \square$$