

XXV Marató de Problemes - Elexioma de l'acció

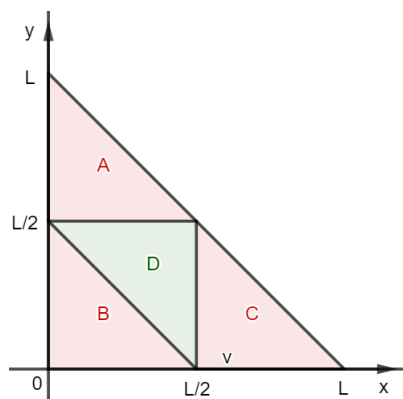
13. Doritos

En Gary vol construir un triangle especial per la seva propera actuació. Per fer-ho disposa d'una vareta recta, que llença contra el terra amb molta força. Assumim que, quan la vareta impacta contra el terra, aquesta es trenca en dos punts que segueixen una distribució uniforme al llarg de la vareta, donant lloc a tres segments. Quina és la probabilitat que en Gary pugui formar el triangle soldant els segments i així petar-ho a la pròxima actuació?

Solució:

Veiem que la probabilitat és $1/4$.

Trencar la vareta de longitud l de forma aleatòria equival a escollir aleatòriament una terna (x, y, z) amb $x, y, z > 0$ i $x + y + z = L$. Això és equivalent a escollir un punt del triangle del dibuix, amb $z = L - x - y$.



La terna (x, y, z) serà un triangle sí i només sí $\begin{cases} x + y \geq z \\ y + z \geq x \\ z + x \geq y \end{cases}$

S'ha de complir

$$x + y \geq z \iff L = x + y + z \leq 2(x + y) \iff x + y \geq L/2 \quad (1)$$

$$y + z \geq x \iff L = x + y + z \geq 2x \iff x \leq L/2 \quad (2)$$

$$z + x \geq y \iff L = x + y + z \geq 2y \iff y \leq L/2 \quad (3)$$

Per tant només ens val l'àrea D . Com la probabilitat és proporcional a l'àrea i les quatre són iguals (equiprobables) obtenim

$$P((x, y, z) \text{ triangle}) = \frac{\text{àrea}(D)}{\text{àrea}(A) + \text{àrea}(B) + \text{àrea}(C) + \text{àrea}(D)} = \frac{1}{4}$$