Maratón de problemas: Problema 27

Francesco Virgolini

Fiñáuuuuu

1º Acto: Asumamos que sumamos...

(Francesco entra en la bolera y ve a Alvarito, que se dispone a tirar)

F: ¡Buongiorno, Alvarito! Te propongo un reto: numerando las rondas del 0 al 9, debes conseguir que tu puntuación en cada ronda forme una secuencia $(x_0, x_1, ..., x_9)$ tal que x_j es el número de veces que j aparece en la secuencia.

A: ¡Hecho! *(Tira con gran pachorra y hace dos plenos seguidos)*

F: ¡C A G A S T E! Ya no puedes ganar el reto. Asumamos que sumamos los elementos de la secuencia; dado que x_j indica cuántas veces aparece j, su suma para todo j será el número total de elementos de la secuencia, que es $n + 1$.

A: Resumamos: sumamos 10 bolos en total o no podemos cumplir el reto, y yo ya me he pasado.

F: Efectivamenti. ¡Mi dispiace!

2º Acto: Seamos sinceros

(Francesco baja a cenar en la Aleu y se encuentra con Alvarito, que hoy está tempranero y ya está empezando la comida del mediodía. Parece haber bebido alguna birra de más, probablemente durante una mentoría)

A: ¡EEEEEY, Francesc Virgolet! Fíjat en lo ben que parlo el català. Què te paret?

F: Bueno, en fin... seamos sinceros...

A: ¡No podem! Porque sabem que $x_0 \neq 0$ ($x_0 = 0$ és una contradicsió inmediat), però això quiere decir que el 0 aparece més de zero vagadas. O sea que no podem ser sin ceros.

F: *(Después de tanto hablar con matc, no le cuesta entender idiomas inventados)* Cierto. Usando entonces que $x_0 \neq 0$ y la igualdad que hallamos en la bolera, tenemos que hay $n+1-x_0$ elementos no nulos en la secuencia y deben sumar $n+1$. Por tanto, si quitamos x_0, nos quedan $n-x_0$ elementos no nulos que suman $n+1-x_0$. Cada uno vale como mínimo 1 y con eso ya sumarían $n-x_0$, así que por fuerza uno ha de valer 2 y los demás 1.

3º Acto: Emosido enguañado

(A la mañana siguiente, Francesco vuelve de clase a las 9:05, muerto de frío. Ve a Alvarito saliendo de la resi, con manga corta y mucha tranquilidad)

F: ¡Ya he encontrado la soluzzione completti! Según lo que hablamos ayer, x_1 puede valer 2, 1 o 0. Analicemos los casos:

1.- Si $x_1 = 2$, tenemos que hay exactamente dos elementos de la sucesión que valen 1. Además, según vimos, todos los elementos con $j > 1$ que no valgan cero deben valer 1, porque el valor 2 ya está tomado por x_1. Como ya sabemos que aparece un 2, tenemos que $x_2 \neq 0$, y por tanto $x_2 = 1$. Para el 1 restante, tenemos dos opciones: la primera es que $x_0 = 1$. En este caso, ya sabemos que la secuencia empieza por 1,2,1 y que el resto son ceros. Además, $x_0 = 1$ indica que solo hay un cero; por consiguiente, esta opción nos lleva a la solución **(1,2,1,0)**.

La otra opción de este caso es que $x_0 = m \neq 1$. Ya hemos comentado que no puede valer cero; aquí tampoco puede valer 2, dado que entonces x_2 no podría valer 1 porque el 2 aparecería más de una vez, en contradicción con lo razonado anteriormente. Por tanto, $m > 2$ y $x_m \neq 0$. De nuevo, razonando como antes, tenemos $x_m = 1$ y volvemos a tener todos los elementos no nulos: $x_0 = m$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_m = 1$. Así obtenemos una solución para cada $m > 2$: **(m,2,1,0,...,0,1,0,0,0)**, donde entre los dos 1s hay $m-3$ ceros y al final están los 3 ceros que faltan.

2.- Si $x_1 = 1$, tenemos que no puede haber más unos. Según hemos razonado anteriormente, el resto de los elementos deben ser x_0, un 2 y todo lo demás ceros. Pero si $x_j = 2$ (con $j > 1$), eso significa que j aparece 2 veces; dado que los únicos elementos que pueden ser mayores que 1 son x_0 y x_j, deducimos que $j = x_0 = x_j = 2$. Por consiguiente, se trata de una secuencia que comienza con 2,1,2 y el resto son ceros (en concreto, $x_0 = 2$ ceros). Concluimos que este caso nos lleva a la solución **(2,1,2,0,0)**.

3.- Finalmente, si $x_1 = 0$, tenemos que la secuencia está formada por x_0, un 2 en una posición $j > 1$ y todo lo demás son ceros (porque $x_1 = 0$ implica que no hay unos). El 2 en la posición j-ésima indica que $j \neq 0$ aparece 2 veces; pero solo tenemos dos valores distintos de 0 y son x_0 y 2, así que forzosamente $j = x_0 = 2$. Por tanto, la secuencia vale 2 en las posiciones 0, 2 y vale cero en el resto; además, $x_0 = 2$ implica que el número de ceros es 2. En conclusión, la secuencia ha de ser **(2,0,2,0)**.

A: Anda! El nuestro any!

F: No hombre, que ya estamos a 2021.

A: Cert, menudo enguany...

F: Enguany no, engany.

A: Cuánto català saps!

F: No hi ha qui em guanyi.