

# Marató de problemes. Problema 30

Francesco Virgolini

Fiñáuuuuu

A l'Izan li va l'àlgebra commutativa. En particular, s'ha fixat en el cos de la seva amiga Andrea. El problema és que l'Andrea li ha dit que no li entregarà el seu cos si ell no li entrega primer un anell. Això no li ha agradat gaire a l'Izan. Els anells poden tenir patologies molt diverses. Per exemple, hi ha anells que no tenen unitat, o que no són commutatius. Això no passa mai en un cos, on sempre pots commutar. Ai, pensa l'Izan, qui pogués estar ara mateix commutant amb l'Andrea, per davant i per darrere...

En fi, per on anàvem? Sí, que l'Izan li vol comprar un anell a l'Andrea. Hi ha un problema però, que l'Izan no té gaire diners. Com que la programació competitiva no dona per gaire, l'Izan ha decidit que resoldrà un problema del mileni, a veure si amb 1 000 000 d'euros li pot comprar a l'Andrea un anell en condicions.

En particular, l'Izan s'ha fixat en la conjectura ABC. Després d'estar-se una estona llegint un article de 600 pàgines sobre Inter-universal Teichmüller Theory, l'Izan ha decidit que la conjectura ABC original és massa difícil, de manera que en resoldrà una versió reduïda. Concretament, l'Izan resoldrà la versió següent:

**Proposició 1.** *Sigui  $R$  un anell (no necessàriament commutatiu ni unitari). Suposem que  $a^2 = 0$  per tot  $a \in R$ . Aleshores,  $abc + abc = 0$  per tot  $a, b, c \in R$ .*

*Demostració.* Siguin  $a, b, c \in R$ . Aleshores,  $(a + bc)^2 - (b + ca)^2 + (c + ab)^2 = 0$ , ja que tot quadrat val zero. Per altra banda,

$$\begin{aligned} (a + bc)^2 - (b + ca)^2 + (c + ab)^2 &= \\ &= a^2 + abc + (bc)^2 + bca - b^2 - bca - (ca)^2 - cab + c^2 + cab + (ab)^2 + abc = \\ &= abc + abc \end{aligned}$$

Per tant,  $abc + abc = 0$ . □