Llista 2. Problema 31: A l'aventura

MACHIS

6 de maig de 2021

Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un paio continu tal que la seva restricció a qualsevol recta passant per l'origen té un mínim local a l'origen. És cert que aquest imbècil té un mínim local a l'origen?

Demostració. No és cert. Vegem-ne un contraexemple. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida com $f(x,y) = (y-x^2)(2y-x^2)$. Clarament és una funció contínua. Vegem primer que $(0,0)$ és mínim local per a tota recta passant per l'origen:
Considerem primer el cas dels eixos:

- **Eix d'abcisses**: els punts de l'eix d'abcisses són $(x,0)$. Aleshores, $f(x,0) = x^4 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$, i com que que $f(0,0) = 0$, (0,0) és mínim local de la funció restringida a l'eix d'abcisses.
- **Eix d'ordenades**: els punts de l'eix d'ordendes són $(0,y)$. Aleshores, $f(0,y) = 2y^2 > 0$ $\forall y \in \mathbb{R}-\{0\}$, i com que que $f(0,0) = 0$, (0,0) és mínim local de la funció restringida a l'eix d'ordenades.

Un cop tractats aquests casos especials, considerem totes les altres rectes que passen per l'origen, que són de la forma $y = mx$, amb $m \neq 0$, i.e., els punts de $\mathbb{R}^2$ que formen part d'una recta que passa per l'origen són (x, mx). Aleshores:

$$f(x,mx) = (mx-x^2)(2mx-x^2) = x^2(m-x)(2m-x)$$

Observem doncs que si $m < 0$, $\forall x \in (m,\infty)-\{0\} \Rightarrow f(x,mx) > 0$ i si $m > 0$ $\forall x \in (-\infty,m)-\{0\}$ $\Rightarrow f(x,mx) > 0$. En qualsevol dels dos casos hem trobat un entorn de (0,0) on $f(x,mx) > 0$ i per tant, com que $f(0,0) = 0$, $(0,0)$ és un mínim local de la funció restringida a aquestes rectes. Amb això hem vist que la restricció de la funció a tota recta que passa per l'origen té un mínim local a $(0,0)$.
Vegem ara doncs que f no té mínim local a $(0,0)$: considerem la paràbola $y = \frac{3}{4}x^2$. Aleshores, al llarg d'aquesta corba, la funció:

$$f(x,\frac{3}{4}x^2) = (\frac{3}{4}x^2-x^2)(2\frac{3}{4}x^2-x^2) = \frac{-1}{4}x^2 \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{-1}{8}x^2 < 0 \forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$$

Hem trobat, amb la paràbola, un entorn on pren valors negatius i com que abans hem donat entorns on prenia valors positius, l'origen no pot ser mínim local. $\square$