XXV Marató de Problemes

Parc Juràssic: Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Martí Oller i Miquel Ortega

36. sinO lo sabes no le des En Pep Burillo és un fanàtic dels concursos de cultura general. A l'últim que va participar, li van preguntar si existeix alguna matriu $O \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$\sin O = \begin{pmatrix} 1 & 2021 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tot i que la resposta és evident, el seu company va prémer el polsador primer i es va quedar callat (ni tan sols es va adonar que tenia un 50% de possibilitats d'encertar si responia aleatòriament). Què hauria respost en Pep, que encerta sempre?

Resolució. En Pep Burillo no només és un mestre en l'art de les matemàtiques, sinó que també domina l'ancestral art de la disfressa. Inspirant-se en el seu referent vital, en Mortadelo, du sempre un complet repertori de disfresses que el pugin ajudar a sortir d'embolics. En veure que el seu company d'equip (que anomenarem J. Franch, per mantenir l'anonimat) s'ha quedat inesperadament en blanc davant les preguntes indiscrimidades del presentador (M. O. Sánchez-Colomer), decideix prendre la iniciativa i usar les seves habilitats per conduir el seu equip a la victòria. El cas és que ràpida i subtilment es posa la seva disfressa de xef de cuina, fet que provoca un gran enrenou entre el públic, que no es pot explicar què hi fa allà un cuiner. El presentador del programa demana explicacions al Pep sobre el sobtat canvi d'indumentària. En Pep respòn amb un sobtat accent de telenovel·la veneçolana "¿Qué quieres que haga? No ceno si no cocino". Per sort, succeeix el miracle i en J. Franch desxifra el'intrincat missatge ocult del geni Burillo: "No seno sino coseno". Ràpidament comprèn que ha de mirar la matriu del cosinus i no del sinus.

Expandint les corresponents sèries, en J. Franch comprova que, per A matriu,

$$\sin(A) = \frac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i} \qquad \cos(A) = \frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2}.$$

Aleshores, com $e^{A+B} = e^A e^B$ si A i B commuten,

$$\sin(A)^2 + \cos(A)^2 = \frac{-e^{2iA} + 2\operatorname{Id} - e^{-2iA} + e^{2iA} + 2\operatorname{Id} + e^{-2iA}}{4} = \operatorname{Id}.$$

En J. Franch suposa que existeix O com demana la pregunta. Utilitzant la propietat anterior,

$$\cos(O)^2 = \operatorname{Id} - \sin(O)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -4042 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ara bé, si

$$\cos(O) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

tenim que

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0 & (1) \\ (a+d)c = 0 & (2) \\ (a+d)b = -4042 & (3) \\ d^2 + bc = 0 & (4) \end{cases}$$

L'equació (3) garanteix que $a + d \neq 0$. Aleshores (2) implica $c = 0$ i per tant (1) i (4) ens diuen que $a = d = 0$, una contradicció. Per tant, no existeix tal O.

Apatosaure