Maratón de problemas: Problema 81

Francesco Virgolini

Fiñáuuuuu

Debido a un muy sutil patrón encontrado en los nombres de los personajes del enunciado, la resolución de este problema se le encargó a Alejandro Basilio (Galván Pérez-Etcétera). Por alguna razón igualmente sutil, se puso a escuchar *Dancing Queen* para inspirarse.

A pesar de que opina que una Anna no es capaz de ver nada y la otra es mu sosa[1] , parece que esta vez han acertado: la afirmación es cierta en dimensión finita. En esta situación, los endomorfismos se pueden expresar en forma de matrices cuadradas que por ABuso de notación llamaremos A, B. Manipulando la expresión de la hipótesis para despejar A,

$$A + B = AB \implies B = AB - A \implies B = A(B - I)$$

Donde I es la matriz identidad de la dimensión de V. Ahora bien, para despejar A, queremos invertir $(B - I)$. Supongamos que no fuese invertible: eso implicaría que no tiene rango máximo, o sea que existe un vector $0 \neq v \in V$ perteneciente al núcleo de $(B - I)$, es decir, un VEP de B de VAP 1. Pero entonces, $0 = (A + B - AB)v = Av + v - Av = v$, ¡contradicción! Por tanto, podemos invertir $(B - I)$, obteniendo $A = B(B - I)^{-1}$.

Finalmente, veamos que B y $(B - I)^{-1}$ conmutan. Como B conmuta con B y con I, también conmuta con su resta. De ahí multiplicamos por $(B - I)^{-1}$ por la izquierda y por la derecha:

$$B(B - I) = (B - I)B \implies (B - I)^{-1}B(B - I)(B - I)^{-1} = (B - I)^{-1}(B - I)B(B - I)^{-1}$$

$$\implies B(B - I)^{-1} = (B - I)^{-1}B$$

Concluimos que A y B conmutan[3]: $AB = B(B - I)^{-1}B = B^2(B - I)^{-1} = BA$.

[1]Por supuesto, el redactor no piensA nnada de eso de las Annas, pero padece ludopatía verbal[2].
[2]Necesidad irrefrenable de hacer juegos de palabras.
[3]Advertencia: la palabra *conmutar* se emplea aquí con un significado puramente matemático. Sería muy

Opinión 1: "Això també és cert per dimensió infinita!"

Lo dice Andreu Boix. Andreu, estàs boig? Alex Batlle lo respalda, pero no pueden ganar esta batalla. Se equivocan, pero respetamos su opinión, ya que toda opinión debe ser respetada.

Lo que han pasado por alto nuestros compañeros en su respetable y respetada opinión es que el argumento usado en el caso finito falla en dimensión infinita, porque existen endomorfismos no invertibles que no tienen VEPs. De hecho, podemos encontrar (respetuosamente) un contraejemplo para la opinión de AB & AB.

Sea V un espacio de dimensión numerable, con una base $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ [4]. Definimos las aplicaciones $A, B : V \to V$ fijando la imagen de los elementos de la base y extendiéndolas linealmente a todo V, de manera que son lineales por construcción:

$$Ae_i = \sum_{j=1}^{i} e_j \qquad\qquad Be_i = e_{i+1}$$

Comprobemos que se cumple $A + B = AB$. Basta con ver que es cierto para los elementos de la base, ya que por ser A y B lineales (y por tanto AB también) se cumplirá para cualquier otro vector.

$$(A + B)e_i = \sum_{j=1}^{i+1} e_j = Ae_{i+1} = ABe_i$$

Sin embargo, vemos que A y B no conmutan:

$$ABe_i = Ae_{i+1} = \sum_{j=1}^{i+1} e_j \neq \sum_{j=2}^{i+1} e_j = B\left(\sum_{j=1}^{i} e_j\right) = BAe_i$$

En conclusión, puedo respetar y respeto la **Opinión 1**, pero es una BArBAridad.

perturbador que se dijese que Alejandro y Basilio conmutan según el significado que dábamos en la resolución del problema 30, lista 2.

[4] Consideramos $0 \notin \mathbb{N}$. No me atrevo a hacer chistes a este respecto por las represalias que pueda haber.