XXV Marató de Problemes

Parc Juràssic: Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Martí Oller i Miquel Ortega

82. Quer drama! Acostumats a tenir en Pere Pascual a topologia, en Jordi Quer opina que els alumnes només han après a dibuixar tors i boles peludes. Per això ha decidit posar el següent problema:

Sigui $\mathbb{K}$ un cos. Podem dotar l'espai afí $\mathbb{K}^n$ amb la topologia de Zariski, en la qual un conjunt $T \subseteq \mathbb{K}^n$ és tancat si, i només si, existeix algun conjunt $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que

$$T = V(S) := \{(a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \, \forall f \in S\}.$$

Proveu que $A = \{(n, 2^n, 3^n) \in \mathbb{C}^3 | n \in \mathbb{N}\}$ és dens a $\mathbb{C}^3$ amb la topologia de Zariski i demostreu-li a en Jordi Quer que heu après alguna cosa.

Resolució. Vegem primer que no hi ha un polinomi no nul que s'anul·li sobre tot A. Sigui $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomi tal. Siguin $a_{i,j,k}$ coeficients tals que $f = \sum a_{i,j,k} x^i y^j z^k$. Siguin s, t tals que maximitzen $2^s 3^t$ dintre dels (s,t) que admeten i amb $a_{i,s,t} \neq 0$. Notem que (s,t) és únic, ja que si $2^s 3^t = 2^{s'} 3^{t'}$, aleshores $2^{s-s'} = 3^{t'-t}$, una contradicció amb el teorema fonamental de l'aritmètica si $s \neq s'$ o $t \neq t'$. Sigui r el major índex tal que $a_{r,m,k} \neq 0$. Aleshores, com $n^\alpha = o(\beta^n)$ per qualsevol $\beta < 1$, tenim que

$$0 = \lim_{n \to \infty} \frac{f(n, 2^n, 3^n)}{n^r (2^s 3^t)^n} = \sum_{i,j,k} \lim_{n \to \infty} a_{i,j,k} \frac{n^i (2^j 3^k)^n}{n^r (2^s 3^t)^n} = a_{r,s,t} \neq 0,$$

una contradicció.

Sigui T un conjunt tancat que conté A. Si $T = V(S)$ i $f \in S$, aleshores $f(A) \subseteq f(T) = \{0\}$, de manera que $S \subseteq \{0\}$ i $T = \mathbb{C}^3$. Per tant, $\bar{A} = C$, és a dir, A és dens.

Apatosaure