Marató de problemes

Wide Putin

May 8, 2021

Problema 90

Dado que A es real y simétrica, por el teorema espectral, es diagonalizable, y sus valores propios son reales. Denotemos por tanto los valores de la diagonal de A diagonalizada (es decir, los valores propios de A repetidos según su multiplicidad algebraica y en algún orden) como $\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_n \in \mathbb{R}$. Como tanto la traza como el polinomio característico de dos matrices semejantes son iguales, tenemos que $c_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ y $c_{n-2} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j$. Entonces

$$(c_{n-1})^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + 2 \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ii} a_{jj} \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + 2c_{n-2}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ii} a_{jj} = c_{n-2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2}{2}$$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ es la traza de A^2. A la vez, dado que A es simétrica, esta traza también equivale a $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2$. Como A es real, $\forall 1 \leq i, j \leq n, a_{ij}^2 \geq 0$, así que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2 \geq \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2$$

Por lo tanto, $\frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2}{2} \geq 0$ así que $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ii} a_{jj} \geq c_{n-2}$.