XXV Marató de Problemes

Parc Juràssic: Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Martí Oller i Miquel Ortega

91. Dijkstret

En Miquel Ortega sempre fa passes erràtiques per la sala mentre pensa problemes d'algorísmia als entrenaments del Roura. Fins fa un any ho feia aleatòriament, però aquest any un fet ha destorbat els seus passeigs. Algú ha pintat algunes rajoles de negre, i ara en Miquel només espot concentrar si fa el següent: només es mourà en línia recta, excepte quan es trobi a sobre d'una rajola negra, on podrà fer un gir de $\frac{\tau}{4}$ o continuar recte. Però com ja sabem, en Miquel té moltes manies, i en aquest cas necessita acabar els seus passeigs on els ha començat (si no li agafa molt de TOC).

Podem imaginar que la sala és una quadrícula $n \times n$, i que exactament $2n$ caselles han sigut pintades de negre. Ajudeu a tranquil · litzar en Miquel demostrant que existeix una casella negra des d'on podrà començar a caminar i tornar a la casella inicial.

Resolució.

És evident que l'autor del problema no coneix gaire en Miquel, àlies *La Rubbish*; és ben sabut que no cal ajudar-lo a tranquil · litzar-se. De fet, es podria dir que la tranquil · litat és la seva actitud vital. Nogensmenys, el seu company d'equip italià, l'Olivetti, sí que s'esvera, perquè ha acabat de picar el Palindromic Tree *«per si de cas»* i no queda turró esberlaqueixals de marca blanca del supermercat de la cantonada que regenta un home malhumorat i els seus quatre fills en règim de semiesclavatge, que és el que menja per calmar-se. Per ajudar-lo a sortir del curtcircuit mental que el porta a colpejar repetidament el seu crani contra la paret, demostrarem que *La Rubbish* podrà acabar el seu passeig a la casella inicial i picar la solució del problema que diu que sap fer perquè *«no ha trobat cap contraexemple»*.

El primer que fa *La Rubbish*, que, afortunadament, sap distingir el blanc del negre, és descartar, iterativament, totes les files i columnes que contenen menys de dues rajoles negres (no descartades anteriorment) fins que no en queda cap. És evident que en tot moment el nombre de rajoles negres és major o igual al nombre de files més el nombre de columnes, perquè al començament $2n \geq n+n$ i per cada rajola negra que es descarta, s'elimina una fila o columna. Aquest procés acaba amb una quadrícula de dimensions $a \times b$ amb $a, b > 1$, ja que a una quadrícula $a \times 1$ no hi caben $a + 1$ rajoles.

A continuació, considera el graf que té per nodes les rajoles negres i on dues rajoles negres estan unides per una aresta si són consecutives en una fila o columna (ignorant les blanques). Com que a cada fila i columna hi ha, pel cap baix, dues rajoles negres, tots els nodes del graf tenen grau major o igual a 2. Per tant, aquest graf conté un cicle. Així doncs, *La Rubbish* pot començar el seu passeig a un node qualsevol del cicle i avançar per les arestes del cicle fins arribar al punt de partida.