

Marató de problemes. Problema 93

Francesco Virgolini

Fiñáuuuuu

Perquè Polònia i no Polàndia? M'alegro que m'ho preguntis. El nom de Polònia deriva dels polans, una de les tribus més importants que habitaven els territoris de l'actual Polònia durant els segles IX i X. L'arrel del mot és incerta, però sembla que podria derivar de *plemię* ('tribu'), *opole* ('grup de pobles d'un mateix clan') o *pole* ('posició de sortida de Francesco Virgolini').

Al llarg dels seus més de 10 segles d'història, li devem a Polònia aportacions tan importants com l'esperanto, la làmpara de querosè, la doblement Premi Nobel Mariah Carey, la sèrie 'The Witcher', els húsars alats¹, el personatge que la palma perquè el confonen amb una rata a Hamlet, la única fan del Villarreal CF², el con d'Apol·loni i la mort del dissident rus Alexander Litvinenko.

Un cop aclarida la qüestió lingüística i havent repassat algunes de les moltes i molt variades aportacions de Polònia al món, passem a resoldre el problema.

Sigui $f(x)$ el nombre esperat de talls en un *ogórek*³ de longitud x (segons l'algorisme descrit a l'enunciat). Com que parem de tallar si la longitud de l'*ogórek* és menor que δ , tenim que $f(x) = 0$ per tot $0 \leq x < \delta$. Per $x \geq \delta$, tenim que $f(x)$ satisfà

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy = 1 + \frac{1}{x} \int_\delta^x f(y) dy$$

ja que el següent tall pot caure equiprobablement en qualsevol punt de l'interval $[0, x]$. Substituint $x = \delta$, trobem la condició inicial $f(\delta) = 1$.

Derivant aquesta equació tenim que

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_\delta^x f(y) dy + \frac{1}{x} f(x) = -\frac{1}{x} (f(x) - 1) + \frac{1}{x} f(x) = \frac{1}{x}$$

La solució d'aquesta EDO és $f(x) = \log x + C$, on $C \in \mathbb{R}$. Aquesta solució serà vàlida a l'interval $[\delta, 1]$, que és on l'equació integral que hem deduït tenia sentit. Imposant la condició inicial $f(\delta) = 1$ trobem el valor de la constant:

$$1 = f(\delta) = \log \delta + C \implies C = 1 - \log \delta \implies f(x) = 1 + \log(x/\delta)$$

La solució del problema serà aleshores $f(1) = 1 + \log(1/\delta) = 1 - \log \delta$.

¹<https://www.youtube.com/watch?v=F-9R49FyLFQ>

²<https://twitter.com/VillarrealCF/status/1390459224812138496?s=20>

³En català correcte direm cogombre i no *pepino*. Dona-li corda al català. 012, la Generalitat al teu costat. 10 milions de parlants, 7.5 milions de futurs, 2.5 milions de parlants sense futur.