Rayyyyoooo McQueeeen

94. El tamaño importa

Observem que 1 pertany trivialment a S. Ara tenim com a mínim altres dos elements $a > b > 1$. Si un d'ells és parell $2 \in S$. En cas contrari $2|ab+1 \in S \implies 2 \in S$. Per tant podem assegurar que 2 està a S.

Tenim com a mínim per tant $1, 2, a \in S$. Anem a provar que $3 \in S$. Fem casos amb el valor de a mòdul 6. Si $a \equiv 0$ ó $a \equiv 3$ mòdul 6 tenim que 3 divideix a a i per tant $3 \in S$. Si $a \equiv 1$ ó $a \equiv 4$ mòdul 6 tenim que $3|2a+1 \in S$ i per tant $3 \in S$. Si $a \equiv 2$ vol dir que $\frac{a}{2} \in S$ i que $\frac{a}{2} \equiv 1, 4$ mòdul 6 i per tant com ja he vist $3 \in S$ (notem que $\frac{a}{2} > 2$). Per últim si $a \equiv 5$ tenim que $2a + 1 \equiv 5$ i $2a + 1 \in S$. Ara $a(2a+1)+1 \equiv 2$ i $a(2a+1)+1 \in S$ i com ja hem vist $3 \in S$. Per tant $3 \in S$.

Ara si $1, 2, 3 \in S$ també tenim que $7 = 2 \cdot 3 + 1 \in S$ i $15 = 2 \cdot 7 + 1 \in S$ i per tant $5 \in S$ al que a la seva vegada implica que $16 = 5 \cdot 3 + 1 \in S$ que indica que $4 \in S$ per tant $1, 2, 3, 4, 5 \in S$. Ara suposem que hi ha algun altre enter que no estigui a S:

Sigui ara $n > 5$ el menor enter positiu que no pertany a S. Si n és imparell tenim que $\frac{n-1}{2} > 2 \in S$ i per tant $n = \frac{n-1}{2} \cdot 2 + 1 \in S$ amb el que no pot ser. Si n és parell tenim que $\frac{n}{2} > 2 \in S$ i per tant $\frac{n}{2} \cdot 2 + 1 = n + 1 \in S$. Ara, com que $n - 1 \in S$ per hipòtesi, $n|n^2 = (n-1)(n+1) + 1 \in S$ amb el que n també pertany a S i no pot existir un $n \notin S$ amb el que $S = \mathbb{Z}^+$.