Marató de problemes

Wide Putin

May 9, 2021

Problema 109

Pintar cuatro planos distintos cualesquiera de $\mathbb{R}^3$ es suficiente para pintar todo el espacio, dado que, de este modo, por todo punto del espacio pasaría una recta no paralela a ninguno de los cuatro planos. Naturalmente pintar cuatro planos también es una condición necesaria para pintar todo $\mathbb{R}^3$. Vamos a encontrar, por tanto, el mínimo número de puntos requeridos para pintar cuatro planos distintos.

Siguiendo un razonamiento similar, podemos observar que para pintar un plano necesitamos pintar cuatro líneas distintas en él. Si no tenemos ninguna ya pintada, tendremos que tener cuatro puntos alineados en ella, porque de otro modo nunca comenzaríamos a pintar nada. Si tenemos una ya pintada, para seguir pintando, por fuerza tendremos que tener por lo menos tres puntos alineados más (sobre una recta secante con la que ya tenemos, si estuvieran sobre una recta paralela necesitaríamos cuatro), porque si no nunca seguiríamos adelante. El mismo razonamiento nos lleva a ver que son necesarios dos puntos más si ya tenemos dos rectas, y uno más si tenemos tres rectas.

De forma que para pintar algun plano necesitaremos por lo menos $10 - x$ (dado que 10=4+3+2+1, y por lo visto en el párrafo anterior) puntos iniciales sobre él y poder pintar x más sobre dicho plano a partir del resto de puntos iniciales. Sin embargo, dado que tener cuatro puntos alineados y luego pintar otro que yazca en esa linea es equivalente, a efectos de pintar, a tener tres de los primeros y el que pintamos como puntos iniciales, podemos suponer sin pérdida de generalidad que hay que disponer de 10 puntos sobre un plano de forma inicial. A continuación hará falta pintar otro plano, que, en caso óptimo, no será paralelo al anterior, con lo cual la intersección de los dos planos representará una recta ya pintada en el segundo. Por el mismo argumento que acabamos de utilizar, y teniendo en cuenta lo visto en el párrafo anterior, harán falta 6 (3+2+1) puntos sobre este segundo plano. Para pintar un tercer y un cuarto plano, siguiendo la misma lógica, harán falta 3 (2+1) y 1 puntos más respectivamente, llegando a un número mínimo de puntos de 10+6+3+1=20.

XXV Marató de Problemes

Problema 109

Comentari dels organitzadors. Una manera més formal de veure que 20 és el nombre mínim de punts necessaris seria la següent. Considerem l'espai vectorial dels polinomis $\mathbb{R}_3[x, y, z]$, en tres variables i de grau menor o igual que 3, que té dimensió 20.

Suposem que es pogués generar tot $\mathbb{R}^3$ amb només 19 punts. Podem triar un polinomi no nul $p \in \mathbb{R}_3[x, y, z]$ que sigui 0 en tots els punts inicials. Per qualsevol punt "construible", donat que el polinomi s'anul·la en com a mínim 4 punts d'una recta que el conté i té grau màxim 3, s'ha d'anul·lar en tota la recta i per tant en el nou punt. Així doncs, només podrem construir punts de $\mathrm{Nuc}(p) \neq \mathbb{R}^3$.