Marató de problemes. Problema 112

Francesco Virgolini

Fiñáuuuuu

En Dani Quiles, desprès de veure un òrdago a petites amb pito pito tres tres i perdre'l per no ser mà (ya me jodería), va a la sala cfis a ofegar les seves penes en problemes del seu professor de problemes de GD: Charles Census. Mentre revisa els apunts de teoria, es fa la

Pregunta 1. *És la lletra de James Loving lo pitjor d'aquesta assignatura?*

Resposta. No. És bastant pitjor com en Charles Census evita fer la seva feina amb un mecanisme que alhora posa als alumnes a competir per nota de forma salvatge, sense estar preestablert el mode en que es fa i dient que *bé, ja veurem.* A més, entre anar a una classe d'en Census o que un tractor em trepitji el dit gros del peu, em faria dubtar molt, si el peu dret o l'esquerra. □

Aleshores, en Dani Quiles, que tot i ser el protagonista del problema no és qui el redacta (Dani, espavila, cabrón), veu al corrector d'aquest problema. I és clar, una concentració de bellesa tant elevada li fa tenir una idea feliç.

Idea feliç 1. *Es compleix, per tot $n \geq 1$, que*

$$b_n = \Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(3 - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_i}\Big)$$

Demostració. Ah, Dani, això és trivial per inducció[1][2]. Mira, el cas $n = 1$ es compleix trivialment

$$LHS = b_1 = \Big(\prod_{i=1}^{1} a_i\Big)\Big(3 - 2\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_i}\Big) = a_1\big(3 - 2\frac{1}{a_1}\big) = 1(3-2) = 1 = RHS$$

Ara, per hipòtesis d'inducció, assumeixes que és cert fins a $n-1$, i veus que

$$b_n = b_{n-1}a_n - 2 = \Big(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\Big)\Big(3 - 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_i}\Big)a_n - 2\frac{a_1 \cdots a_n}{a_1 \cdots a_n}$$

$$= \Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(3 - 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_i} - \frac{2}{a_1 \cdots a_n}\Big) = \Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(3 - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_i}\Big)$$

□

Tot ja va ser molt ràpid. Els qui eren presents a la sala CFIS no són capaços de trobar paraules que descriguin la velocitat a la qual aquest membre de Francesco Virgolini resolia el problema. Era inexplicable. Els dos Rayo McQueen a la sala, quan vinguin els anys, i amb els anys la calma, seràn capaços de reflexionar sobre l'impressionant demostració de velocitat del Quiles. Fins i tot els del màster van deixar de cridar.

Idea feliç 2. $S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a_1 \cdots a_i} \leq \frac{3}{2}$ *i per tant convergeix.*

Demostració. Saps que $b_n > 0$ per definició. A més, com $a_i > 0$, aleshores $\prod_{i=1}^{n} a_i > 0$ Per tant,

$$\Big(3 - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_i}\Big) > 0 \iff \frac{3}{2} > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_i}$$

Ara, t'és suficient amb prendre el límit per $n \to \infty$ per obtenir l'expressió desitjada □

[1] Si, parla amb ell mateix

[2] En realitat no ho se, sorry Dani

Sigui $Q = \sup_{n\geq 1}\{|b_n|\}$ amb Q de Quiles, que és real i està ben definida per estar $(b_n)_{n\geq 1}$ estar fitat. En Dani culmina aquest moment de lucidesa (recordem, provocat per tu, corrector, guapo!) de la següent manera:

Idea feliç 3. $S = \frac{3}{2}$

Demostració. Com S convergeix per la idea feliç anterior, sabem que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_1\cdots a_n} = 0$. Aleshores, Dani, com saps que $0 < b_n \leq Q$ i pots fer el següent:

$$0 < \Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(3 - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_i}\Big) \leq Q \iff 0 < \Big(3 - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_i}\Big) \leq \frac{Q}{a_1 \cdots a_n}$$

Ara, prens límit per n tendint a infinit i

$$0 \leq 3 - 2 \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_1 \cdots a_i} \leq Q \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_1 \cdots a_n} = Q0 = 0$$

Pel Teorema del Sandvitx, és evident que

$$3 = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_1 \cdots a_i} = 2S$$

□

En Dani, està molt content, i es posa a escriure tot el que hi aqui però sense la història supèrflua que m'esforço en escriure perque soc un puto pesat. I quan ho va a penjar... Sorpresa! El Civit ja havia penjat la solució en un moment on en va pujar un nombre no numerable. Deixem aquí la cara que se li queda al Dani. Però tu, corrector, sents compassió per ell (per l'equip) i li poses un 7.