XXV Marató de Problemes

Parc Juràssic: Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Martí Oller i Miquel Ortega

117. Però el Sarrus no és allò de les dents?

A causa de les males notes que van treure l'any passat, els n^2 alumnes d'en Jordi Guàrdia han repetit. Novament, les notes han sigut catastròfiques, i, mantenint-se fidel al seu mètode, en Jordi les ha escrit en una matriu $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\geq n}$, que curiosament compleix que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j \text{ és primer} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Cabrejat, en *Martín Rodríguez* ha tornat a anar a revisió. Per aprovar d'una vegada per totes, en Jordi li ha demanat que demostri que $|\det(A)| = k^2$ per algun enter k o no podrà pujar nota!

Resolució. Més en general, considerem la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & x_2 & \dots \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & \dots \\ 0 & x_2 & 0 & x_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

on les variables x_k són enteres, i estan posades al llarg de les antidiagonals de forma alternada. Demostrarem que aquesta matriu té determinant $\pm k^2$, amb k enter. Pel nostre problema, només és qüestió de posar $x_i = 1$ o $x_i = 0$ allà on toqui.

Observem el següent:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & x_2 & \dots \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & \dots \\ 0 & x_2 & 0 & x_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & \dots \\ 0 & x_2 & 0 & x_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & x_2 & \dots \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & \dots \\ 0 & x_2 & 0 & x_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Si les dimensions de la matriu són senars, llavors el segon determinant és 0: a les files $1, 3, \dots, n$ tenim entrades únicament en les columnes $2, 4, \dots, n-1$; és a dir, tenim $(n+1)/2$ vectors pertanyents a un subespai vectorial de dimensió $(n-1)/2$, de manera que han de ser linealment dependents.

Si les dimensions de la matriu són parells, llavors és el primer determinant el que s'anul·la: expandint per l'1 a la posició $(1,1)$ ens queda una matriu com la del paràgraf anterior, que té determinant 0.

Observem que el cas senar es redueix al cas parell desenvolupant per la posició $(1,1)$. Respecte el cas parell, podem permutar les files deixant les files parelles al principi i després les senars i permutar les columnes deixant les senars al principi i després les parelles per tal que ens quedi

$$\det \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & x_2 & \dots \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & \dots \\ 0 & x_2 & 0 & x_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \pm \det \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

on B és la matriu

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Per tant, el determinant en aquest cas serà $\pm \det(B)^2$, i ja estem.

Bambiraptor