XXV Marató de Problemes

Parc Juràssic: Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Martí Oller i Miquel Ortega

118. Quina desgràcia!

Com que en Xavi Gràcia s'ha passat 40 minuts queixant-se de que anava molt curt de temps, no ha tingut temps de demostrar el següent enunciat, així que l'ha deixat com a "miniexercici". Sabríeu resoldre'l?

Sigui $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció $\mathcal{C}^\infty$ tal que $f(0)=0$, $f(1)=1$ i $f(x) \geq 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. Demostreu que existeix un enter positiu n i un nombre real x tal que $f^{(n)}(x) < 0$.

Resolució. Ho farem per contradicció: suposem que hi ha una funció d'aquestes característiques amb $f^{(n)}(x) \geq 0$ per a tot n i per a tot x.

En primer lloc, observem que $f(x) = 0$ per a tot $x < 0$. Altrament, pel teorema del valor mitjà existiria $\xi < 0$ tal que $f'(\xi) < 0$, contradient la hipòtesi anterior. En particular, notem que $f^{(n)}(0) = 0$ per a tot n.

Agafem $0 < \lambda < 1$. Llavors, com que totes les derivades són funcions convexes, per a tot $x \in \mathbb{R}$ tindrem

$$f^{(n)}(\lambda x) = f^{(n)}((1-\lambda)0 + \lambda x) \leq \lambda f^{(n)}(x).$$

D'una banda,

$$\int_0^x f^{(n)}(\lambda t)dt = \frac{1}{\lambda} f^{(n-1)}(\lambda x).$$

D'altra banda, també tenim

$$\int_0^x f^{(n)}(\lambda t)dt \leq \lambda \int_0^x f^{(n)}(t)dt = \lambda f^{(n-1)}(x).$$

Per tant, tenim

$$f^{(n-1)}(\lambda x) \leq \lambda^2 f^{(n-1)}(x) \implies f(\lambda x) \leq \lambda^{n+1} f(x).$$

No obstant, n és arbitrari en la desigualtat anterior. Si prenem $x = 1$, això implica que $f(\lambda) = 0$ per a tot $0 < \lambda < 1$, contradicció amb el fet que la funció sigui contínua en $x = 1$.

Bambiraptor