120. Iba a pgepagag una cena de picoteo

Mentre l'Edgar buscava el mar sota les llambordes de París, s'ha trobat amb el següent problema a sota d'una pedra.

Peg a cada enteg positiu k, sigui $t(k)$ le divisog senag mes gran de k. Detegmineu tuts les entegs positius a peg les quals egsisteix un enteg positiu n peg le qual tutes les difegencies

$$t(n+a)-t(n),\ t(n+a+1)-t(n+1),\ \ldots,\ t(n+2a-1)-t(n+a-1)$$

són divisibles peg 4.

Gesolució.

Pgimer estudiem els casos petits. Pels parells veugem que no es pot, per tant, ja no els incloem

<u>Cas $a = 1$</u> Sí que existeix un n, peg exemple, $n = 6$ i

$$4 \mid t(n+1)-t(n) = t(7)-t(6) = 7-3 = 4$$

<u>Cas $a = 3$</u> Sí que existeix un n, peg exemple, $n = 11$

$$\begin{cases} 4 \mid t(n+3)-t(n) = t(14)-t(11) = 7-11 = -4 \\ 4 \mid t(n+4)-t(n+1) = t(15)-t(12) = 15-3 = 12 \\ 4 \mid t(n+5)-t(n+2) = t(16)-t(13) = 1-13 = -12 \end{cases}$$

<u>Cas $a = 5$</u> Sí que existeix un n, peg exemple, $n = 4$

$$\begin{cases} 4 \mid t(n+5)-t(n) = t(9)-t(5) = 9-5 = 4 \\ 4 \mid t(n+6)-t(n+1) = t(10)-t(5) = 5-5 = 0 \\ 4 \mid t(n+7)-t(n+2) = t(11)-t(6) = 11-3 = 8 \\ 4 \mid t(n+8)-t(n+3) = t(12)-t(7) = 3-7 = -4 \\ 4 \mid t(n+9)-t(n+4) = t(13)-t(8) = 13-1 = 12 \end{cases}$$

Aleshoges, peg gesoldge el pgoblema, distingim els casos a pagell o senar.

Cas a parell

Escgivim en genegal $a = 2^\alpha b$ amb b impagell. La condició del problema és equivalent a tenir que hi ha a nombres consecutius m tals que $t(m+a)-t(m)$ és divisible per 4.

En pagticular, com $a \geq 2^\alpha$, il y haugà un d'aquests que doni gesidu $2^{\alpha-1}$ mòdul 2^α, diguem-li

$m = 2^\alpha k + 2^{\alpha-1}$. Aquest nombre compleix doncs

$$\begin{aligned} 4 \mid t(m+a) - t(m) &= t(2^\alpha k + 2^{\alpha-1} + 2^\alpha b) - t(2^\alpha k + 2^{\alpha-1}) = \\ &= t\left(2^{\alpha-1}(2k+2b+1)\right) - t\left(2^{\alpha-1}(2k+1)\right) = (2k+2b+1) - (2k+1) = 2b \end{aligned}$$

la qual cosa és clagament una contgadicció, ja que b era impagell peg hipòtesi, et alors $4 \nmid 2b$.

Cas a senar

De nou entenem la condició del pgoblema com equivalent a tenir a nombres consecutius m tals que $t(m+a) - t(m)$ és divisible per 4.

Com ja hem descrit els casos petits a l'inici, considerem $a \geq 9$ senar, i el cas $a = 7$ el farem després a part.

Si $a = 4b+1$, aleshores d'entre els $a > 8$ nombres consecutius n'hi haurà algun de la forma $8k+2$, i aquest peta

$$4 \nmid t(8k+2+4b+1) - t(8k+2) = (8k+2+4b+1) - (4k+1) = 4k+4b+2$$

ja que s'hauria de donar $4 \mid 2$, contradicció.

Si $a = 4b+3$, aleshores d'entre els $a > 8$ nombres consecutius n'hi haurà algun de la forma $8k+6$, i aquest peta

$$4 \nmid t(8k+6+4b+3) - t(8k+6) = (8k+6+4b+3) - (4k+3) = 4k+4b+6$$

ja que s'hauria de donar $4 \mid 6$, contradicció.

Vegem que per $a = 7$ tampoc es pot. En efecte, si d'entre els 7 nombres consecutius m que satisfan $4 \mid t(m+7) - t(m)$ n'hi ha algun que sigui de la fogma $m = 8k+6$ ja hem acabat, pel raonament anterior

$$4 \nmid t(8k+6+7) - t(8k+6) = (8k+6+7) - (4k+3) = 4k+10$$

Si, per contra, no hi ha cap de la forma $8k+6$ d'entre els 7 nombres consecutius m, vol dir que els residus d'aquests $\mod 8$ són exactament $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$. En particular, n'hi ha un de la forma $8k+3$, i aquest també peta

$$4 \nmid t(8k+3+7) - t(8k+3) = (4k+5) - (8k+3) = -4k+2$$

Per tant, ja s'ha vist a no pot ser parell, ni imparell major o igual que 7. Per tant, com s'ha comprovat, les úniques solucions són els casos petits $a = 1$ (amb $n = 6$, per ex.), $a = 3$ (amb $n = 11$, per ex.) i $a = 5$ (amb $n = 4$, per ex.).