Marató de problemes. Problema 121

Francesco Virgolini

Fiñáuuuuu

Acto 1. *Any 121, tot i que els romans no li deien aixi.* L'emperador Adri*ano* es disposa a veure la carrera entre els dos grans portadors de cuádrigues que actualment hi ha sobre la terra. El primer és d'una zona propera a Roma, i fa anys que destrossa totes les carreres en les que participa, sense deixar lloc a les sorpreses. Va amb el número XLV, y es el bólido más rapido de tutto l'imperio. És Francesconi Virgoli!! L'altre corredor és la gran promesa, que han portat després de les últimes conquestes a Britania. Es fa dir Raggio Macuino.

Avui tots dos s'havien jugat el seu honor. Qui guanyés, sería l'home de máxima confiança de l'emperador. Mentre, el perdedor, seria enviat, defenestrat, a egipte a vigilar que no vinguessin més Aliens a construir pirámides. Narraria la carrera com si tingués quelcom d'emocio. Però és que un entregable d'estadística és més divertit. Els cavalls que portaven Francesconi van volar com no es veia a ningú en aquell foro des de feia segles, quan Rómulo corria perseguint una lloba. En canvi, Raggio va fer com fa habitualment. Va correr la carrera sense més, tu. En plan, mira, aqui et demostro el que em demanes i no faig res més perque tinc un sentit de l'humor de puta merda. Mentre Virgoli feia trickshots a l'aire, escrivia resolucions mencionant actrius porno, fent-se autoreferències, amb incontenibles jocs de paraules, hipervincles al KFC o citant cançons de Manel. No només això, sinó que també era més ràpid.

Virgoli va arribar a la meta i mentre esperava als subnormals de Rayyyyyyo Bla Bla, va dir *Si* $m > n$*, aleshores* $\{\frac{n}{m}\} = \frac{n}{m}$ *i per tant* $\frac{n}{m} \geq \frac{1}{2} \iff m \leq 2n$, tothom al seu voltant no entenia res, però l'agafava del braçet. Va arribar Raggio, i mentre recuperava el aliento La fuerza, la pasta, las ganas de verte El encanto, la salsa, la luz de mis ojos Mi as de la manga, tus ojitos rojos Me faltan, me faltan, Se li va escoltar a Francesco dir:

En canvi, si $m < n$, sabem que $n = km + r$ per la dívisió euclídea, que això si s'ha descobert i no és cap anacronisme. Aleshores, $\{\frac{n}{m}\} = \{\frac{km+r}{m}\} = \frac{r}{m}$. Com $r < m$, s'ha de complir que $r \geq 2m$. Per tant, tenim $(k+1)m > n = km+r \geq km+m/2$. Girant ambdues desigualtats, tenim $m > \frac{n}{k+1}$ i $m \leq \frac{2n}{2k+1}$. Per tant, $m \in S_n \iff m \in (\frac{n}{k+1}, \frac{2n}{2k+1}]$ per algun $k \geq 1$ o si $m \in \{n+1, \cdots, 2n\}$.

Impressionats per com havia caracteritzat S_n, Adriano va decidir que el faria emperador *en la sombra*, junt amb el seu amic *Biggus Dickus*. En canvi, Raggio va haver de marxar a fer solucions soses que tot i ser matemàticament correctes no haurien de tenir puntuació. A més després el Javier pregunta que què vol dir està en progressió aritmètice. Que s'ho facin mirar. Virgoli hagues acabat ja el problema, però Euler encara no havia existit i seria un anacronisme, aixi que va esperar fins l'Acto 2.

Acto 2.

[Per alguna raó que escapa de la nostra comprensió, i que en cap cas es deu a la nostra incapacitat per resoldre el problema, aquest acte on es resolia s'ha perdut entre els *anals* de la història. Hem preguntat a la Guàrdia Civil (ACAB) però han dit que les últimes investigacions apunten a que l'Acto 2 es trobaria a Sant Esteve de les Roures. En Xicu Torres es un pesao però assegura que si el votem ens donarà l'Acto 2. Historiadors de renom asseguren que Hitler el va fer cremar per por a la bellesa de la demostració, i Fermat assegura en una carta que aquella demo si li cabria en un marge. Algun membre del nostre equip ha arribat a suggerir que el gos se'ns havia menjat el ordinador. Però és obvi que no perque els gossos mai podrien tenir interès per quelcom tant lleig com la informàtica. Manel opina que l'Acto 2 mai s'enterra; s'amaga en el calaix més elevat del menjador, es lloga per hores, es ven al millor postor, se li diu a un germà que te la guardi una temporada, es dóna al museu de seguretat més relaxada, però mai s'enterra, mai s'enterra i s'esmola en la fosca. En tot cas, mai sabrem que ha passat, però com us podem assegurar que existeix, sou lliures de posar-nos un 7, o fins i tot més.]

Acto 3. *Dissabte 8 de maig del 2021. 12:00 del matí.* Queden 12 hores perque acabi l'estat d'alarma. Però Francesco Virgolini estò en una espiral de inproductivitat que no li permetrà gaudir del no-toc-de-queda. Es publica la penúltima llista de problemes. La Marató s'ha convertit en una IronMan de problemes, però llegeix el problema 11^2 i s'il·lumina. Va sobre ell. I el parodia contra la seva antítesis: Ray$\cdots$yo Mac-cuin. El problema és sorprenentment realista. Fa una descripció molt correcte de Francesco (*Entra el pionero piloto Francesco Virgolini, pináculo de la ingeniería automovilística, rápido como ave de rapiña e imparable como apisonadora*), i diu tot lo interessant que es pot dir de l'altre cotxe: *Y Rayo McQueen.*. A més, representa a Rayo com algú sense personalitat aparent. I que tot i que treurà més punts que nosaltres, haurà rigut menys. Per tant són estrictament perdedors.

A nosaltres se'ns caricaturitza com gent que pren més consciència del que envolta a la demostració que al que és pròpiament el problema. I és que no només som un *pináculo de la ingeniería automovilística*, sinó que Francesco Virgolini representa un moviment cultural, transversal, que aspira a crear una comunitat on tohtom pugui conmmutar[1] amb qui desitji, i que inspiri a les generacions que venen. Però, sobretot, un món on l'anglès s'ensenny bé. Punto. És amb aquesta intenció, que resoldrem el pronblema. I es posa a escrriure:

Acto 1. *Any 121...*

Baixa el teló. Els assistents a l'obra de teatre, aplaudeixen, meravellats pels dos actes que han vist, i assumint pel Teorema del Sandvitx *que el Acte 2 era la hòstia. Al acabar, tenen la conversa que a continuació es relata*

- **PJ**. Doncs a mi m'ha agradat molt, vam fer bé de donar-los per guanyadors l'any passat.

- **WP**. Pues yo creo que para lo fáciles que son los problemas, no tiene ningun mérito lo que han hecho.

- **NN**. Apuntar-se sent tres semblava una missió suicida, pero ha valgut la pena per saber com van matar al WhatsApp del Baroja

- **Eu**. Però no us sembla excessiu que hagi escrit més de 1000 paraules per amagar que ni tan sols ha fet la demostració?

- **Ma**. A mi em sembla totalment justificat

- **RM**. Doncs a mi em sembla que han fet un relat massa llarg per un problema tan *mundano*

- **FV**. Pues me la agarras con la mano.

Te falta calle, Rayo, te falta calle.

[1] Com L'Izan voldria amb l'Andrea, no com l'Alejandro i el Basilio

121.

Per cada nombre natural n, sigui S_n el conjunt d'enters positius m tals que $\{\frac{n}{m}\} \geq \frac{1}{2}$, on $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ representa la part fraccional de x. Demostreu que

$$\sum_{m \in S_n} \varphi(m) = n^2$$

Resolució.

Diguem A_n a la suma considerada $A_n := \sum_{m \in S_n} \varphi(m)$ Si aconseguim demostrar que $A_{n+1} - A_n = 2n + 1$, ja haurem acabat, ja que resolent la trivial recurrència amb les condicions inicials

$$\begin{cases} A_1 = \varphi(2) = 1 = 1^2 \\ A_2 = \varphi(3) + \varphi(4) = 2 + 2 = 2^2 \\ A_3 = \varphi(2) + \varphi(4) + \varphi(5) + \varphi(6) = 1 + 2 + 4 + 2 = 3^2 \\ A_4 = \varphi(5) + \varphi(6) + \varphi(7) + \varphi(8) = 4 + 2 + 6 + 4 = 4^2 \end{cases}$$

obtindrem $A_n = n^2$.

Primer de tot, notem que la condició $m \in S_n$ és equivalent a

$$\left\{ \frac{n}{m} \right\} = \frac{n}{m} - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \geq \frac{1}{2}$$

posant $n = am + b$, amb $0 \leq b < m$, és

$$\frac{b}{m} \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad b = n\%m \geq m/2$$

on % és l'operador que dona el residu i dona un valor entre 0 i el mòdul en qüestió menys u (com a info vaja).

Per provar la relació presentada, anem a caracteritzar els elements m que pertanyen **exactament a un** dels conjunts S_n i S_{n+1}.

Cas 1. Només a S_{n+1}

Cerquem m tal que $\begin{cases} m \notin S_n \\ m \in S_{n+1} \end{cases}$. Com ja s'ha comentat, aquestes condicions equivalen a

$$\begin{cases} n\%m < m/2 \\ (n+1)\%m \geq m/2 \end{cases}$$

ara però, hem de distingir subcasos

Cas m senar.

Si m és senar, $m/2$ no és enter, i aleshores per satisfer ambdues desigualtats alhora cal tenir

$$\begin{cases} n\%m = \frac{m-1}{2} \\ (n+1)\%m = \frac{m+1}{2} \end{cases}$$

Per tant, posant $n = am + b$ obtenim $n+1 = am + \frac{m+1}{2}$ i això implica que $2n+1 = m(2a+1)$. Aleshores, tenim que aquests m són precisament els divisors senars de $2n+1$. Ara bé, com que $2n+1$ és senar, tots els seus divsors són senars, i aleshores podem dir en general que m és un divisor qualsevol de $2n+1$. Escrivim doncs

$$\sum_{m \in S_{n+1} \setminus S_n} \varphi(m) = \sum_{m|2n+1,\, m\, odd} \varphi(m) = \sum_{m|2n+1} \varphi(m) = 2n+1$$

Al resultat obtingut, cal restar aquells valors de m senars que divideixen tant a $n+1$ com a $2n+1$, és a dir, l'1. Ja que s'ha comptat en el sumatori però no satisfà que $(n+1)\%m = \frac{m+1}{2}$. Per tant ens quedem amb $2n+1-\varphi(1) = 2n$.

Cas m parell.

Si m és parell, $m/2$ és enter, i aleshores per satisfer ambdues desigualtats alhora cal tenir

$$\begin{cases} n\%m = \frac{m}{2} - 1 \\ (n+1)\%m = \frac{m}{2} \end{cases}$$

Per tant, posant $n = am + b$ obtenim $n+1 = am + \frac{m}{2}$ i això implica que $2(n+1) = m(2a+1)$. Notem llavors que m és un divisor parell de $2(n+1)$.

Però atenció, no pot ser divisor de $n+1$, ja que llavors la segona igualtat no es compliria.

En conjunt, les restriccions m parell, divisor de $2(n+1)$ però no de $n+1$, fan que puguem escriure

$$\sum_{m \in S_{n+1} \setminus S_n} \varphi(m) = \sum_{m|2(n+1),\, m\, even} \varphi(m) - \sum_{m|n+1,\, m\, even} \varphi(m) =$$

Escrivint $m = 2m'$ i recordant que $\varphi(2) = 1$ i

$$\varphi(2m') = \begin{cases} \varphi(m') & \text{si } m' \text{ és senar} \\ 2\varphi(m') & \text{si } m' \text{ és parell} \end{cases}$$

El sumatori equival a

$$= \sum_{m'|(n+1)} \varphi(2m') - \sum_{m|n+1,\, m\, even} \varphi(m) =$$

$$= \left(\sum_{m'|n+1,\, m'\ odd} \varphi(m') + 2 \sum_{m'|n+1,\, m'\ even} \varphi(m') \right) - \sum_{m|n+1,\, m\, even} \varphi(m) =$$

$$= \sum_{m'|n+1,\, m'\ odd} \varphi(m') + \sum_{m'|n+1,\, m'\ even} \varphi(m') =$$

$$= \sum_{m'|n+1} \varphi(m') = n+1$$

d'acord amb la ben coneguda identitat $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Cas 2. Només a S_n

Cerquem m tal que $\begin{cases} m \in S_n \\ m \notin S_{n+1} \end{cases}$. Com ja s'ha comentat, aquestes condicions equivalen a

$$\begin{cases} n\%m \geq m/2 \\ (n+1)\%m < m/2 \end{cases}$$

i aquestes condicions en conjunt només es poden satisfer si $n+1 \equiv 0 \mod m$, ja que estem sumant 1 a $n\%m$ però obtenim un valor inferior.

En particular, hem caracteritzat aquests m com a divisors de $n+1$. Per tant, podem escriure

$$\sum_{m \in S_n \setminus S_{n+1}} \varphi(m) = \sum_{m|n+1} \varphi(m) = n+1$$

d'acord amb la ben coneguda identitat $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Tal com s'ha fet anteriorment, a aquest valor de $n+1$ se li ha de restar $\varphi(1)$ ja que, tot i ser divisor de $n+1$ no satisfà la condició $n\%m \geq m/2$. Ens quedem doncs amb $n+1-\varphi(1) = n$

It's all coming together, bitch

Amb tot això, notem que

$$A_{n+1} - A_n = \sum_{m \in S_{n+1}} \varphi(m) - \sum_{m \in S_n} \varphi(m) =$$

$$= \left(\sum_{m \in S_{n+1} \setminus S_n} \varphi(m) + \sum_{m \in S_{n+1} \cap S_n} \varphi(m) \right) - \left(\sum_{m \in S_{n+1} \cap S_n} \varphi(m) + \sum_{m \in S_n \setminus S_{n+1}} \varphi(m) \right) =$$

$$= \sum_{m \in S_{n+1} \setminus S_n} \varphi(m) - \sum_{m \in S_n \setminus S_{n+1}} \varphi(m)$$

i aquests termes els hem calculat a sengles casos (Cas 1, unint m senars i parells; i Cas 2), per tant, substituint

$$A_{n+1} - A_n = (2n + (n+1)) - n = 2n+1$$

Tal i com volíem demostrar. Per tant, satisfan la recurrència mencionada amb les condicions inicials comentades. Aleshores, per trivial inducció, si $A_n = n^2$, llavors $A_{n+1} = n^2 + A_n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ i hem acabat.