XXV Marató de Problemes

Parc Juràssic: Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Martí Oller i Miquel Ortega

243. Put in more words

Espereu. Tranquis, Wide Putin. Que ja us veiem escrivint "243. *Trivial* $\square$" i encara no heu ni llegit el problema. Potser a Harvard això us ho accepten però per nosaltres no tot és tan fàcil. Respireu profundament i intenteu resoldre el següent problema en no menys de 3 línies.

Sigui $d \geq 2$. Donada l'esfera S^{d-1} i d punts sobre ella, demostreu que es pot traçar una recta passant per l'origen tal que la distància de cada punt a la recta sigui com a mínim $\sqrt{\frac{d-1}{d}}$.

Resolució. Siguin $p_1, \ldots, p_d$ els punts donats, que entendrem com vectors de $\mathbb{R}^d$. Sigui $r \in S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ un vector amb $\|r\| = 1$. La distància de p_i a la recta que passa per l'origen i per r és $\sin(\theta)$, on θ és l'angle que formen p_i i r. Per tant, que la distància sigui la demanada és equivalent a $\sin(\theta) \geq \sqrt{\frac{d-1}{d}}$, és a dir, és equivalent a

$$(p_i, r)^2 = \cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta) \leq \frac{1}{d}. \tag{1}$$

on aquí i d'ara en endavant (u, v) és el producte escalar estàndard a $\mathbb{R}^n$.

Si $p_1, \ldots, p_d$ són linealment dependents, es troben dins d'un hiperplà i podem prendre r pertanyent al seu ortogonal intersecat amb S^{d-1}, complint trivialment la condició. Suposem d'ara en endvant que són linealment independents.

Sigui B la matriu de canvi de base de $\{p_1, \ldots, p_d\}$ a $\{e_1, \ldots, e_d\}$, és a dir,

$$B = \begin{pmatrix} p_1 & \ldots. & p_d \end{pmatrix},$$

de manera que $\mathrm{Tr}(B^t B) = \sum_{i=1}^{d} \|p_i\|^2 = d$. Siguin $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d$ signes per triar i

$$v = (B^t)^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_d \end{pmatrix}.$$

Prenent els signes de manera uniformement aleàtoria, tenim que, si $C = B^{-1}(B^t)^{-1}$,

$$E(\|v\|^2) = E\left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j C_{ij}\right) = \mathrm{Tr}(C).$$

Ara bé, C és simètrica i definida positiva, de manera que si $1/\lambda_i$ són els seus valors propis, fent servir la desigualtat entre la mitjana harmònica i l'aritmètica i que $C^{-1} = B^t B$,

$$E(\|v\|^2) = \mathrm{Tr}(C) = \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \geq \frac{d^2}{\sum_i \lambda_i} = \frac{d^2}{\mathrm{Tr}(B^t B)} = d.$$

Per tant, existeix una configuració de signes de manera que $\|v\| \geq \sqrt{d}$. Prenem aquesta configuració i assignem $r = \frac{v}{\|v\|}$. Aleshores

$$(r, p_i) \leq \frac{1}{\sqrt{d}} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_d \end{pmatrix} B^{-1} p_i = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{d}},$$

és a dir, que verifica (1).

Apatosaure