# XXV Marató de Problemes

Parc Juràssic: Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Martí Oller i Miquel Ortega

### 244. Ens està costant quadrar els enunciats

El Fausto està quadrat. Un quadrat té costats, i sembla que la llista 3 ha costat molt als Machis. Tampoc és que ens quADRI la seva liada al problema 12, que els hauria d'haver sortit RODat. Demostreu que el límit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{i=1}^{n} \left(n^2 + k^2\right)^{\frac{1}{n}}$$

existeix i coincideix amb el nombre de dominades que pot fer l'Enric, trobant el seu valor.[1]

**Resolució.** Anomenem $a_n$ el terme del qual volem calcular el límit. Tindrem:

$$a_n = \frac{1}{n^2} \prod_{i=1}^{n} \left(n^2 + k^2\right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Prenent logaritme esdevé:

$$\log(a_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right).$$

Aquesta suma és precisament la suma superior per una partició uniforme de la integral $\int_0^1 \log(1+x^2)\mathrm{d}x$. Com $\log(1+x^2)$ és contínua a $[0,1]$, és integrable i tenim:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \log(a_n) &= \int_0^1 \log(1+x^2)\mathrm{d}x = \Big[\log(1+x^2)x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \log(2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \log(2) - 2\left[x - \arctan x\right]_0^1 \\ &= \log(2) - 2 + \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

on hem usat integració per parts. Així doncs,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim_{n\to\infty}\log(a_n)} = e^{\log(2)-2+\frac{\pi}{2}} = 2e^{\frac{\pi}{2}-2},$$

que és un nombre real entre 1 i 2, de manera que no podem dir que tingui les dominades gaire dominades.

*Dino a las drogas*

[1] Fonts oficials asseguren que l'Enric, en veure l'enunciat, esTaba en plan: "Jo no me'n ric".