246. Para todo böl·la

Seguidament construirem un posicionament de les boles d'$\mathcal{A}$ en el cub sense que s'intersequin dos a dos.

Numerem les boles d'$\mathcal{A}$. Anomenem b_i la bola i-èssima i r_i el seu radi, i definim $\mathcal{B}_n := \{b_1, ..., b_n\} \subset \mathcal{A}$. Posicionar les boles de $\mathcal{B}_n$ és equivalent a donar una tupla $P_n = (p_{1n}, ..., p_{nn})$ on p_{in} és el centre de b_i. Direm que el posicionament és "bo" si $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$ $B(p_{in}, r_i) \cap ([0,1]^3)^c = \varnothing$ i $d(p_{in}, p_{jn}) \geq r_i + r_j$, és a dir, si les boles estan contingudes en el cub i no s'interseququen dos a dos. Per les hipòtesis donades, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists P_n$ un posicionament bo de $\mathcal{B}_n$, així que podem considerar una successió de posicionaments bons $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aquesta successió de posicionaments indueix una successió de centres $(p_{in})_{n\geq i}$ per a cada b_i, i com que són successions de punts en un compacte totes admeten parcial convergent en $[0,1]^3$.

A continuació associarem a cada b_i un punt concret $p_i \in [0,1]^3$ que serà el seu centre en un posicionament bo de tot $\mathcal{A}$ per demostrar que en efecte es poden posicionar totes les boles de $\mathcal{A}$. Ho farem de la següent manera: Com que $(p_{1n})_n$ admet parcial convergent, en triem una, definim p_1 com el límit de la parcial, i definim $(P_n^{(1)})_n$ com la parcial de $(P_n)_n$ associada a la parcial convergent de $(p_{1n})_n$. Repetim el procés de tal manera que donada la successió $(P_n^{(k-1)})_n$, la parcial de $(P_n)_n$ on $(p_{in})_n$ convergeix per $i < k$, prenem una parcial tal que p_{kn} convergeixi, definim p_k com el límit i anomenem $(P_n^{(k)})_n$ a la parcial corresponent, de tal manera que en aquesta $(p_{in})_n$ convergeix a p_i per a $i \leq k$. Com que a cada pas ens quedem amb una parcial infinita que es comporta escencialment com la successió originial, podem arribar a qualsevol $i \in \mathbb{N}$ concret. Així doncs, hem obtingut un punt p_i per a cada $b_i \in \mathcal{A}$ que serà el seu centre quan posicionem tot $\mathcal{A}$.

Demostrem doncs que aquest posicionament és bo. Demostrem primer que $\forall i, j$ amb $i \neq j$, b_i i b_j no s'interseququen quan els posicionem a p_i i p_j respectivament. Suposem que sí i arribarem a una contradicció. Si s'interseququen, com que són obertes, no s'interseququen únicament en un punt i tenim doncs que $d(p_i, p_j) < r_i + r_j$ i doncs també $\exists \varepsilon > 0$ tal que $d(p_i, p_j) < r_i + r_j - \varepsilon$. Però si considerem la successió $(P_n^{(j)})_n$, on p_{in} i p_{jn} convergeixen, tenim que per aquest ε, $\exists n_i, n_j$ tal que $d(p_{in}, p_i), d(p_{jn}, p_j) < \varepsilon/2$ quan $n > n_i$ i $n > n_j$ respectivament, i doncs aplicant la desigualtat triangular i prenent $n > n_i, n_j$, tenim $d(p_{in}, p_{jn}) \leq d(p_{in}, p_i) + d(p_i, p_j) + d(p_j, p_{jn}) < \varepsilon/2 + r_i + r_j + \varepsilon + \varepsilon/2 = r_i + r_j$, que vol dir que b_{in} i b_{jn} s'interseququen, en contradicció amb que tots els posicionaments eren bons.

Similarment es demostra que b_i està completament continguda en el cub considerant p_i i $p \in ([0,1]^3)^c$ i aplicant un raonament per distàncies anàleg. Així doncs, $(p_i)_i$ determina un posicionament bo de totes les boles d'$\mathcal{A}$, com volíem.