XXV Marató de Problemes

Parc Juràssic: Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Martí Oller i Miquel Ortega

247. Pal Urdős Veient les solucions que ens heu enviat fins ara, sembla que d'entre els participants d'aquest concurs no en sortirà un futur Paul Erdős, ni tampoc cap Euler. Resoleu el següent problema per a fer-nos canviar d'opinió:

S'escriuen els enters de 1 *a* n *en* n *cartes diferents, que es barregen en una baralla. L'Oriol Baeza, el Pau Redon i l'Arnau Padrés escullen aleatòriament cartes de la baralla en el següent ordre: primer n'escull una l'Oriol, tot seguit una el Pau, a continuació l'Arnau, després en tria una altra l'Oriol... Cada vegada que es tria una carta, aquella mateixa i totes les que tenen un nombre més alt es treuen de la baralla, i les restants es barregen de nou abans que el següent jugador n'esculli una. Un jugador guanya quan escull la carta amb el número* 1*. Demostreu que, per a cadascun dels 3 jugadors, existeixen valors de* n *arbitràriament grans pels quals aquell jugador és el que té la probabilitat més alta de guanyar el joc.*

Resolució. Siguin a_n, b_n, c_n les probabilitats que el primer, segon o tercer jugador (resp.) guanyin la partida amb n cartes. Si el primer jugador escull la carta n, llavors la partida és equivalent a una partida amb $n-1$ cartes on comença el segon jugador. Altrament, és equivalent a una partida amb $n-1$ cartes on comença el primer jugador. En resum:

$$\begin{cases} a_n = \frac{n-1}{n}a_{n-1} + \frac{1}{n}c_{n-1} \\ b_n = \frac{n-1}{n}b_{n-1} + \frac{1}{n}a_{n-1} \\ c_n = \frac{n-1}{n}c_{n-1} + \frac{1}{n}b_{n-1} \end{cases}$$

Les condicions inicials són $(a_1, b_1, c_1) = (1, 0, 0)$. Demostrarem que els ordres relatius de a_n, b_n, c_n van variant segons el següent cicle (iniciat arbitràriament):

1. $a_n > b_n > c_n$;
2. $b_n > a_n > c_n$;
3. $b_n > c_n > a_n$;
4. $c_n > b_n > a_n$;
5. $c_n > a_n > b_n$;
6. $a_n > c_n > b_n$.

Es pot comprovar que aquest cicle es compleix inicialment per a n prou petites. Primer, vegem que no podem saltar-nos cap pas d'aquest cicle. Farem el primer cas, els altres són anàlegs. Observem abans que:

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n}(c_{n-1} - a_{n-1}) \\ b_n - b_{n-1} = \frac{1}{n}(a_{n-1} - b_{n-1}) \\ c_n - c_{n-1} = \frac{1}{n}(b_{n-1} - c_{n-1}) \end{cases}$$

En el primer cas, la a_n disminueix mentre que la b_n i la c_n augmenten. Observem que c_n mai pot superar o igualar a_n o b_n en aquest cas[1], així que l'únic canvi d'ordre es pot produir quan b_n superi a a_n, és a dir, en el cas 2.

També hem de veure que no ens quedem indefinidament atrapats en un pas del cicle. Com abans, tots els casos són anàlegs al primer, així que farem la demostració en aquest cas. Si $a_n > b_n$ tindrem

$$\begin{aligned} a_{n+1} < b_{n+1} &\iff a_n + \frac{1}{n+1}(c_n - a_n) < b_n + \frac{1}{n+1}(a_n - b_n) \\ &\iff (a_n - b_n) < \frac{1}{n+1}\left((a_n - b_n) + (a_n - c_n)\right) \\ &\iff \frac{n}{n+1}(a_n - b_n) < \frac{1}{n+1}\left(a_n - c_n\right) \\ &\iff \frac{a_n - b_n}{a_n - c_n} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Veurem que això passa eventualment. Escrivim $r_n = \frac{a_n - b_n}{a_n - c_n}$. Llavors,

$$r_{n+1} = \frac{\frac{n}{n+1}(a_n - b_n) + \frac{1}{n+1}(c_n - a_n)}{\frac{n}{n+1}(a_n - c_n) + \frac{1}{n+1}(c_n - b_n)} = \frac{nr_n - 1}{n + (r_n - 1)}.$$

Notem que

$$r_n - r_{n+1} = \frac{r_n^2 - r_n + 1}{n + (r_n - 1)} \geq \frac{3}{4n},$$

ja que el mínim de $f(x) = x^2 - x + 1$ és $3/4$, i ja que $0 < r_n < 1$. En particular,

$$r_n - r_m \geq \frac{3}{4} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k},$$

que per a m suficientment gran permet assegurar que $r_m < \frac{1}{m}$, com volíem veure.

Bambiraptor

[1] Això en particular implica que la seqüència no s'estabilitza mai a $a_n = b_n = c_n = 1/3$.