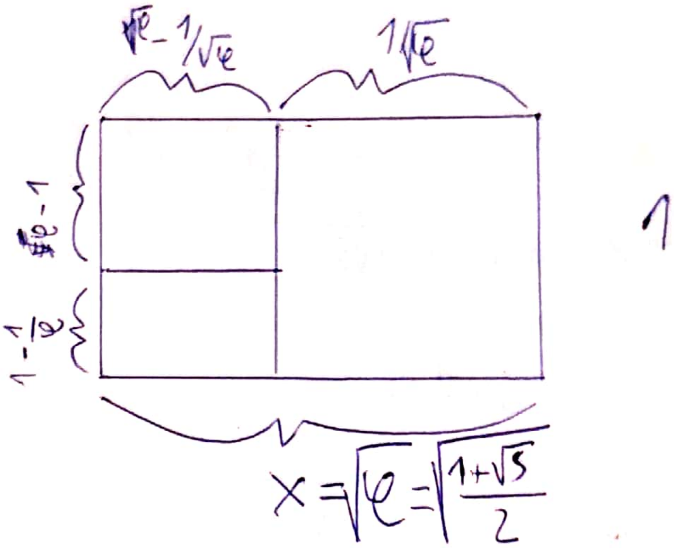
Equip: Parc Juràssic

$\boxed{\text{P252}}$

Per a $n=2$, clarament no es pot. Demostrarem que per a $n\geq 3$ sí que és possible.

Si $n=3$, considerem



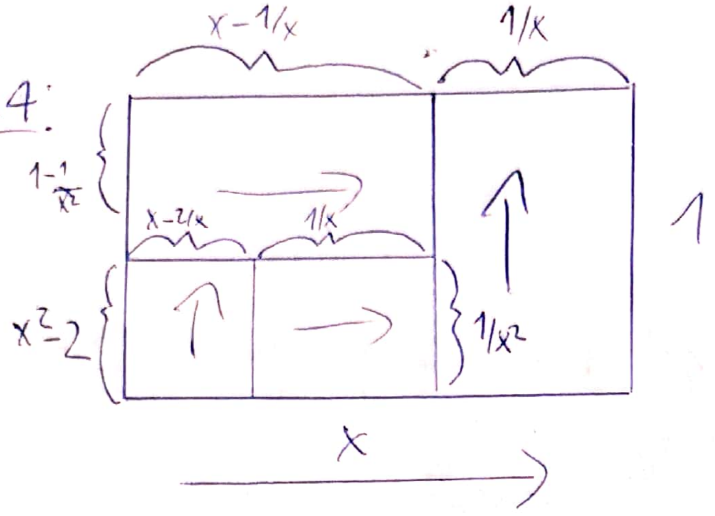
Les dimensions quadren perquè $\left(1-\frac{1}{\varphi}\right)+(\varphi-1)=\frac{\varphi-1+\varphi^2-\varphi}{\varphi}=\frac{\varphi+1-1}{\varphi}=1.$

Inductivament, podem construir una solució $\forall n$ senar:
si tenim una construcció de $n=2K-1$, on els rectangles tenen ràtio $\sqrt{\varphi}$, podem inserir la construcció de $n=3$ dins del rectangle més petit de la construcció de $n=2k-1$, obtenint així una construcció per a $n=2K+1$.

(les mides sempre seran diferents, les que afegim són més petites estrictament).

Per a n parell, considerem la següent construcció:

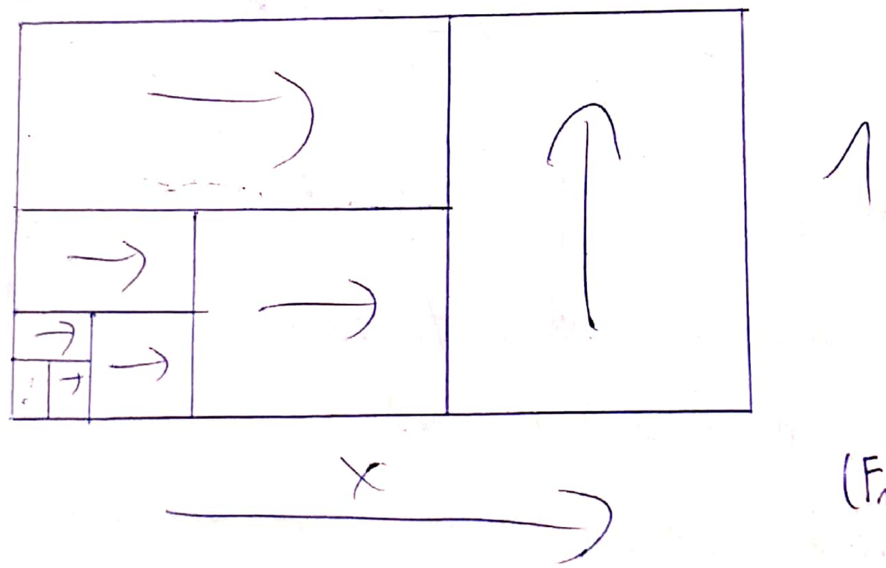
$n=4$:



(les fletxes indiquen l'orientació).

↳ la x ve donada per l'eq.: $(x^2-2)+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1 \Leftrightarrow x^4-2x^2-1=0$, que té la solució $x=\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Més en general, la construcció és

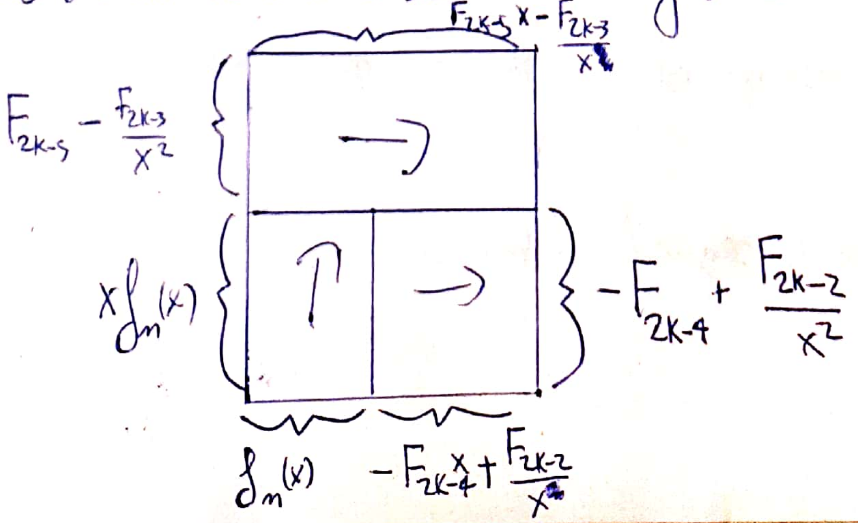


$F_0=0, F_1=1, F_2=1, \dots$

($F_n \equiv$ Fibonacci)

perdó ;)

Considerem l'última secció de rectangles de la construcció. ($n=2k$)



on $f_n(x) = F_{n-3}x - \frac{F_{n-1}}{x}$

(és fàcil comprovar-ho tot per inducció).

En efecte, notem que el dibuix ens dona el pas inductiu:

Si l'amplada del subrectangle gran és $f_{n-1}(x)$, llavors l'amplada del petit és $f_n(x)$.
Aplicant-ho inductivament, tenim l'amplada $\forall n$.
Quant al cas base, observem que $f_4(x) = x - \frac{2}{x} = F_1 x - \frac{F_3}{x}$.

Amb tot això, l'equació que defineix x és:

$$F_{n-3}x^2 - F_{n-1} = -F_{n-4} + \frac{F_{n-2}}{x^2} \iff F_{n-3}x^4 + (F_{n-4} - F_{n-1})x^2 - F_{n-2} = 0$$

Considerem la quadràtica associada $g(x) = F_{n-3}x^2 + (F_{n-4} - F_{n-1})x - F_{n-2}$.

Notem que $g(1) = F_{n-3} + F_{n-4} - F_{n-1} - F_{n-2} < 0$

i que $F_{n-3} > 0$,

de manera que $\exists x_0 > 1$ t.q $g(x_0) = 0 \Rightarrow \sqrt{x_0}$ és la proporció del rectangle

Explícitament, $x = \sqrt{x_0} = \sqrt{\dfrac{(F_{n-1} - F_{n-4}) + \sqrt{(F_{n-4} - F_{n-1})^2 + 4F_{n-3}F_{n-2}}}{2(F_{n-3})}}$

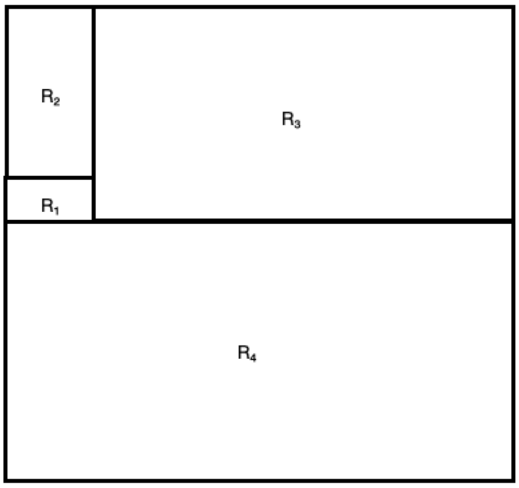
— Bamlinaptor

XXV Marató de Problemes

Problema 252

Solució dels organitzadors. Incloem la nostra solució, una mica més breu.

Per $n = 2$ la construcció no és possible. Per cada $n \geq 3$ fem la construcció següent. Donat un $r \geq 1$, considerem un rectangle R_1 de costats 1 i r. Per cada $k = 2, 3, \ldots, n-1$, afegim un rectangle R_k de ratio r, de manera que el costat petit de R_k coincideixi amb el costat gran del rectangle construït fins el moment. Per últim, afegim el rectangle R_n de manera que el seu costat gran coincideixi amb el costat gran del rectangle actual. A continuació es mostra la construcció per $n = 4$:



Sigui $\varphi(r)$ el quocient entre els costats del rectangle total (on al denominador hi és el costat gran de R_n). Notem que les longituds dels costats del rectangle total són polinomis en r que no es poden anul·lar per cap $r \geq 1$ (ja que la construcció és possible), de manera que $\varphi(r)$ és una funció contínua en $[1, \infty)$. Clarament, per $r = 1$ es té $\varphi(1) > 1$. Per altra banda, notem que el rectangle total és el resultat de quasi doblar el costat petit de R_n, i per tant, $\varphi(r) < \frac{2}{r}$ i en particular $\varphi(2) < 1 < 2$. Per Bolzano, existeix un $r' \in (1, 2)$ tal que $\varphi(r') = r'$.

Per construcció, aquesta és una subdivisió d'un rectangle de ratio r' en n rectangles similars no congruents.