XXV Marató de Problemes

Parc Juràssic: Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Martí Oller i Miquel Ortega

253. A bel si hay suerte

L'Abel Doñate ens ha demanat **si us plau** que ens deixem de ximpleries i posem algun problema de veritat. Això no obstant, el comitè organitzador no vol que la resta de participants es quedin enrere, així que decideixen deixar-ho en mans de l'atzar. Atès que no disposen d'una moneda o un dau, però casualment sí que disposen d'un disc unitat, ho faran de la següent manera: triaran 5 punts aleatòriament al disc unitat, de manera uniforme i independent. Si l'embolcall convex dels punts és un triangle, llavors posaran un problema de veritat. Quina és la probabilitat que l'Abel quedi satisfet?

Resolució.

Sigui A el valor esperat del quadrat de l'àrea del triangle que formen tres punts uniformement distribuits sobre el disc unitat. La probabilitat p que volem trobar té valor

$$p = \binom{5}{3} \frac{1}{\pi^2} A.$$

En efecte, cal sumar, per cada tripleta de punts, la probabilitat que els altres dos siguin dins del triangle format per la tripleta. Fixades les posicions dels vèrtexs d'un triangle, la probabilitat que dos punts caiguin dins és el quadrat del quocient de l'àrea del triangle entre l'àrea del disc, π. Prenent l'esperança d'aquest valor, obtenim la fórmula anterior.

Sols cal, doncs, calcular A. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que els vèrtexs tenen coordenades polars $(a, 0), (b, \theta), (c, \varphi)$. El valor d'$A$ ve donat per la següent integral elemental.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 2a\,\mathrm{d}a \int_0^1 2b\,\mathrm{d}b \int_0^1 2c\,\mathrm{d}c \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\varphi \\
&\qquad \frac{1}{4}\|(b\cos\theta - a, b\sin\theta) \times (c\cos\varphi - a, c\sin\varphi)\|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \\
&\qquad abc\left((b\cos\theta - a)\,c\sin\varphi - (c\cos\varphi - a)\,b\sin\theta\right)^2 \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}c\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}a \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^{2\pi} \\
&\qquad -2\pi\cos s^2a^3b^3c - 2\pi\cos sa^2b^2c^3 + 2\pi a^3b^3c + \pi a^3bc^3 + \pi ab^3c^3\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}c\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}a \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 2\pi^2a^3b^3c + 2\pi^2a^3bc^3 + 2\pi^2ab^3c^3\,\mathrm{d}c\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}a \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2}\pi^2a^3b + \frac{1}{2}\pi^2ab^3 + \pi^2a^3b^3\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}a \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^1 \frac{1}{8}\pi^2a + \frac{1}{2}\pi^2a^3\,\mathrm{d}a \\
&= \frac{3}{32}.
\end{aligned}
$$

Concloem que

$$
p = \binom{5}{3}\frac{1}{\pi^2}A = \frac{15}{16\pi^2}.
$$

Tirano-Saura