XXV Marató de Problemes

Parc Juràssic: Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Martí Oller i Miquel Ortega

256. Me tenéis hasta el xixi

L'activitat és frenètica a la comissió de festes del 2000. Porten 4 mesos de ressaca en ressaca, organitzant festes sense parar i dissenyant samarretes que s'entenen a la primera. Sembla que amb tant de desmadre, no han tingut temps de pensar en el següent problema:

Demostreu que existeix un nombre real $\alpha > 1$ que satisfà la propietat següent: si $n > 1$ i $\xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n$ són enters positius tals que $\frac{1}{\xi_0}, \frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{1}{\xi_n}$ estan en progressió aritmètica, aleshores $\xi_0 > \alpha^n$.

Resolució. Notem que

$$\frac{1}{\xi_{i+2}} = \frac{2}{\xi_{i+1}} - \frac{1}{\xi_i} = \frac{2\xi_i - \xi_{i+1}}{\xi_{i+1}\xi_i},$$

de manera que

$$\frac{2\xi_i - \xi_{i+1}}{\mathrm{mcd}(\xi_i, \xi_{i+1})}\xi_{i+2} = \mathrm{mcm}(\xi_i, \xi_{i+1}),$$

i, en particular, $\xi_{i+2} | \mathrm{mcm}(\xi_i, \xi_{i+1})$. Raonant inductivament podem concloure que

$$\xi_{i+2} | \mathrm{mcm}(\xi_i, \xi_{i+1}) | \mathrm{mcm}(\xi_i, \mathrm{mcm}(\xi_i, \xi_{i-1})) | \mathrm{mcm}(\xi_0, \xi_1).$$

Si definim $M = \mathrm{mcm}(\xi_0, \xi_1)$ i $d_i = \frac{M}{\xi_i}$, tenim que

$$d_i - d_j = \frac{M}{\xi_i} - \frac{M}{\xi_j},$$

de manera que els d_i són divisors de M en progressió aritmètica. En particular, $M \geq \mathrm{mcm}(d_0, \ldots, d_n)$. És sabut que el mínim comú múltiple de $n+1$ nombres en progressió aritmètica és major o igual a 2^{n-1}. A l'apèndix en donem una demostració elemental que no és original.

Aleshores

$$\xi_0\xi_1 \geq M \geq \mathrm{mcm}(d_0, \ldots, d_n) \geq 2^{n-1}.$$

Per tant, o bé ξ_0 o ξ_1 és major o igual a $2^{(n-1)/2}$. Ara bé, $2\xi_0 > \xi_1$, ja que

$$\frac{1}{\xi_0} = \frac{2}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2} < \frac{2}{\xi_1}.$$

Per tant, per $n \geq 4$,

$$\xi_0 \geq \max(\xi_0, \xi_1/2) > 2^{(n-3)/2} \geq (2^{1/8})^n.$$

Pel cas $n \leq 3$ només cal notar que $2\xi_0 > \xi_1 \geq 2$ de manera que $\xi_0 > 1$ i per tant podem prendre $\alpha < 2^{1/3}$.

Fita del mínim comú múltiple.

Siguin $a, a+d, \ldots, a+nd$ enters positius en progressió aritmètica. Sigui $k = \lfloor n/2 \rfloor$. Desenvolupant el binomi i integrant terme a terme, comprovem que

$$\mathrm{mcm}(a, a+d, \ldots, a+nd) \int_0^1 x^{a-1}(x^d)^k(1-x^d)^k\, dx \tag{1}$$

és enter. Per altra banda, fent servir la desigualtat entre les mitjanes geomètrica i aritmètica,

$$\int_0^1 x^{a-1}((x^d)(1-x^d))^k\, dx \leq \int_0^1 x^{a-1}/4^k\, dx = \frac{1}{a4^k} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Com el producte (1) és enter, necessàriament

$$\mathrm{mcm}(a, a+d, \ldots, a+nd) \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Apatosaure