Rayyyyoooo McQueeeen

Quin problema tenen els putus cfisos?

Sigui $G_r(n)$ el nombre de n-tuples ordenades de naturals tal que el seus recíprocs sumen r. Volem calcular la paritat de $G_1(272)$.

Demostrem primer que $G_r(2n) = G_{r/2}(n) \mod 2$. Emparallem les tuples solució amb el seu *reverse* $(a_1, \cdots a_{2n}) \to (a_{2n}, \cdots, a_1)$. Totes les solucions emparellades se'ns anulen modul 2. Els únics no emparellats són les solucions palindromiques (que s'han emparellat amb ells mateixos). Ara veiem que hi ha una bijecció entre les solucions palindròmiques i les solucions amb n fraccions de $r/2$. Donada una solucío palindròmica, com $2n$ es parell, podem agafar nomes els termes $(a_1, \cdots a_n)$ i sumaràn $r/2$. L'altra implicació, donana una solucío en n termes de $r/2$, podem construir $(a_1, \cdots, a_n, a_n, \cdots a_1)$ que es palindròmica i suma r. Pel $G_r(2n) = G_{r/2}(n) \mod 2$.

Això ens basta per veure que $G_1(272) = G_{1/2}(136) = G_{1/4}(68) = G_{1/8}(34) = G_{1/16}(17) \mod 2$. Ara fixem una de les 17 fraccions (la del mig) a ser $\frac{1}{a}$. Aleshores

$$G_{1/16}(17) = \sum_{a \in \mathbb{N}} G_{\frac{a-16}{16a}}(16) \tag{3}$$

No ens preocupem per la infinitut d'aquest sumatori encara, tot i que al final veurem que només té un nombre finit de termes no 0 i per tant no hi ha problema. Usant de nou que $G_r(2n) = G_{r/2}(n) \mod 2$, veiem

$$G_{1/16}(17) = \sum_{a \in \mathbb{N}} G_{\frac{a-16}{16a \times 16}}(1) \tag{4}$$

Notem que $G_r(1) = 1$ si $1/r$ és un natural i 0 sinó. Pel que nomes queda comptar, modul 2, quins a compleixen que $\frac{256a}{a-16}$ és un natural.

Si $a-16|256a \iff a-16|256a-16\times256+16\times256 \iff a-16|2^{12}$. Per tant, tot $a \in \{2^i+16\}_{0\leq i\leq 12}$ serà valid i cap altre. Es a dir tenim 13 possibles a, un nombre senar, pel que la suma es 1 i, tirant enrere a la demostració $f(272) = G_1(272) = 1 \mod 2$.