271. El análisis real se enseña mal. Punto.

Observem en primer lloc que $Ac = c$ on c és una funció constant i $Ax^k = \frac{x^k}{k+1}$, d'on $A^n x^k = \frac{x^k}{(k+1)^n}$ i doncs $\lim_{n\to\infty} A^n x^k = 0$ en $[0,1]$ si $k > 0$. Així doncs, donat un polinomi p, aplicant la linealitat d'A obtenim que $\lim_{n\to\infty} A^n p = p(0)$. En altres paraules,

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ :\ \forall n > N\ |p(0) - A^n p| < \varepsilon \tag{1}$$

En norma infinit (totes les normes en el que segueix són la norma infinit).

Observem també que $v < u \implies Av < Au$, ja que $(Av)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x v(t)dt < \frac{1}{x}\int_0^x u(t)dt = (Au)(x)$. En particular,

$$|v - u| < \varepsilon \Rightarrow v - \varepsilon < u < v + \varepsilon \Rightarrow Av - \varepsilon < Au < Av + \varepsilon \Rightarrow |Av - Au| < \varepsilon \tag{2}$$

Observem finalment que el Xavier Cabré és un pallasso i no sap del que parla, ja que tenim una base molt sòlida de real: El Teorema d'Aproximació de Weierstrass assegura que els polinomis són densos en $\mathcal{C}([0,1])$ en norma infinit, és a dir,

$$\text{donada } g \in \mathcal{C}([0,1]), \forall\varepsilon > 0\ \exists p \text{ un polinomi tal que } |p - g| < \varepsilon \tag{3}$$

. Així, per a cada ε hi ha un polinomi p per (3) i un N per (1) tals que $\forall n > N$ es té

$$|g(0) - A^n g| \leq |g(0) - p(0)| + |p(0) - A^n p| + |A^n p - A^n g| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

On apliquem (2) al pas $|p - g| < \frac{\varepsilon}{3} \implies |A^n p - A^n g| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Així doncs, $\lim u_n = \lim A^n g = g(0)$.