

Marató de problemes. Problema 273

Francesco Virgolini

Fiñáuuuuu

Ai Josep, Josep. T'has endut una decepció més gran que en Jaume Amorós quan li van dir que, tot i ser només dos matriculats a Topologia Algebraica, ens havia de donar classe. I que ens havia de donar de teoria i problemes. Però mira, ara a ell sembla fins i tot que li agrada, així que tu potser et pots animar i intentar solucionar el problema. Per suposat, ho faràs pitjor que nosaltes, però no passa res. Tenim una oportunitat. Ai, ai, ai, a veure què en fem.

En Francesco és un gran fan, per alguna raó que desconeixem, de la Roma. Aquest any no estan per tirar coets. la veritat que la mala temporada que estan fent, sobretot en lliga, no es pot dissimular ni tan sols amb les semis de Europa League, i menys després de que el United t'en fiqui 6. Però ell recorda la nit gloriosa que van remontar una eliminatòria europea al Barça, gràcies a un cop de cap de Kostas Manolas. Va anar-ho a celebrar a la **Fontana** di Trevi, on de pas va recollir uns cèntims. En Josep **Fontana**, no ha estat mai a Roma, ni li interessa massa el futbol, ho sabem per una **font contrastada**, i no enten a que coi ve aquest paràgraf.

En Josep estava a Montjuic, a la **font**, **anava** pensant en en el problema. El truquen i despenja el **telefon**: **T'anava a dir de quedar per buscar subconjunts** $S \subset \{1, \dots, 100000\}$ **amb 2021 elements que no continguin 3 elements en progressió aritmètica. Joder, Javier, com no ho saps, el que vol dir.** El Xavier Povill, després d'explicar-nos les meravelles de Polàquia, va entrar a Reddit a intentar guanyar diners enfonsant fons d'inversió **gegants**. Allà, es va trobar aquest **mem** que li va voler enviar immediatament al Pablo Gómez. Ell, com és casi de Murcia, se sent mig marcià i li va fer molta gràcia l'acudit. Estava pensant en bases i ha tingut una idea per, al nostre concurs, posar-li el colofont.

A na Lara, que tot i no ser del equip surt a la història per poder fer el joc de paraules, li sembla bona idea i li diu al Joan. El Joan, ha sortit a correr per primer cop des de que va sortir, en mig de la pandèmia, a la hora aquella que **Pdr Sanchez** deixava per anar fer esport, i va solucionar l'altre problema de numeració. Va contar fins a tres i va dir, *hostia, ja veig quin patró segueixen els nombres*.

L'Alejandro, curtit en fer-nos creure que es basc quan es diu Basilio Galván Perez, i és més d'extremadura que MisterChip, no va quedar gens impressionat. És clar que estan agafant els nombres que en base 3 no tenen cap dos, sereu capcigranys¹. En Dani Quiles, que ja se li havia passat el seu **Cabrèig**² amb el professor, va dir que ens bastava amb agafar aquests números.

És clar, com volem mínim 2021 nombres, i en cada posició en base 3, el millor és tenir un nombre proper a $2048 = 2^{11}$. Per poder tenir, mínim 2047 opcions, ens val agafar qualsevol combinació de uns i zeros, on no tot siguin zeros, dels nombres de la forma $\xi_{10}3^{10} + \dots + \xi_03^0$. En efecte, tots son més grans que 1 i més petits que $3^{10} + \dots + 3 + 1 = 88573$. Ens és suficient agafar qualsevol subconsunt de 2021 elements d'aquest de 2047 que hem definit. Aleshores, en Bernat, que venia de estar posant-se encara més mamat al gimnàs i resoldre un parell de problemes de la llista XXX³, diu: *Aleshores, falta provar que en el conjunt FV no hi ha tres elements en progressió aritmètica..* On, per si no havia quedat clar, $FV = \{\xi_{10}3^{10} + \dots + \xi_03^0 \mid \xi_i \in \{0, 1\}, \sum_i \xi_i > 0\}$

No teníem ni **pajolera** idea de com demostrar-ho. Escrivíem relats absurds en la resta de problemes amb la intenció de dissimular la nostra incapacitat matemàtica. Per sort, després de que

¹Amb lo facha que és, segurament no va dir capcigranys sino *comunista*

²Ja se que estava enfadat amb el Padró, però la broma era massa bona. Aquí volem viure entusiasmats, aquí volem una bina història abans que la veritat

³La trenta, malpensats

en Francesco superés la deprimició⁴ de que [Jose Mourinho](#) sigui el pròxim entrenador *Giallorossi*, va venir raudo y veloz, i de sobte, argumenta:

Suposem que tenim $x_0, x_1 = x_0 + d, x_2 = x_0 + 2d$ tres nombres de *FV* en progressió aritmètica de raó d . Considerem la expressió de d en base 3⁵. Sigui i la posició de la xifra més petita de d que no és 0, que serà 1 ó 2. És clar que x_0, x_1, x_2 en base 3 seràn iguals per les xifres més petites que i . Considerem la xifra i -èssima de x_0 (sempre parlant en base 3). Com $x_0 \in FV$, ha de ser 1 ò 0. Analitzem tots dos *croissants*:

- Si és 1, i la xifra de d en aquella posició és 1, la de x_1 serà 2 i no podrà pertanyer a *FV*. Si la de d és 2, la de x_1 serà 0 però la de x_2 serà un 2.
- Si és 0. Si la xifra de d és un 2, peta x_1 i si és un 1 peta x_2

Tots ens hem quedat sorpresos amb aquesta demo, d'igual manera que la densitat de bromes amb **fontana** ha decaigut perque ja estaven sent massa forçades. Tots estarem d'acord en que només hi ha una manera correcte d'acabar amb aquest concurs:



Figura 1: Soy, Francesco virgolini. fiaaa-uuuuuunnn. LA MAQUINA MAS BLOZ, DE TOTE ITALIE. fiaauuuuuunnn. con el númeroo cuarenta y chinkue. fiaaa-uuuuuunnn

⁴Aquesta sí és inventada

⁵Bé, ja sabem que és base 10, però per entendrens