12) EULER2.

$a>0$, $I(a)=\int_0^\infty e^{-ax}\,dx$. Usant diferenciació dins la integral (Leibnitz)

$$\frac{d^n}{da^n}=\int_0^\infty (-x)^n e^{-ax}\,dx=(-1)^n\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx$$

Però $I(a)=-\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^\infty=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{a}e^{-ax}-\left(-\frac{1}{a}e^{-a\cdot 0}\right)=0+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$.

Així, també podem expressar

$\frac{d}{da}=\frac{-1}{a^2}$, $\frac{d^2}{da^2}=\frac{2}{a^3}$, ... $\frac{d^n}{da^n}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{a^{n+1}}$, per trivial inducció

Llavors igualant ambdós resultats

$$\frac{d^n}{da^n}=(-1)^n\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx=(-1)^n\frac{n!}{a^{n+1}}$$

I avaluant en $a=1$, finalment

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} = \frac{n!}{1} = n! \quad \checkmark.$$

El cas $n=0$ és immediat: $\int_0^\infty e^{-x} = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1 = 0!$.

Per tant, queda demostrat $\forall n \in \mathbb{N}$.

Les hipòtesis per entrar la derivada a l'integral se satisfan

- $x^n e^{-ax}$ és integrable $\forall x, a, n$.
- la derivada resp. a és contínua i existeix