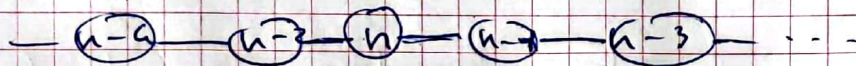
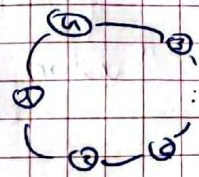


3a Busquem la Col·locació

de n números en una circumferència de manera que es maximitzi la suma dels productes de dos nombres consecutius. Veurem que la millor distribució és la següent



o sigui començant per n , posem l' $n-1$ i de forma decreixent, tots els de la seva paritat a un costat i $n-2$ i tots els de la seva paritat a l'altre costat.

Vegeu per inducció que aquesta és la millor distribució.

Cas base: $n=3$, tots les distribucions donen el mateix valor

Pas inductiu: Sigui $S(n)$ el valor òptim per a la distribució amb n nombres.

Sigui $\Delta(n)$ el màxim increment que pots fer afegint el número n a una distribució de $n-1$ elements.

Prop: $\Delta(n) = n(n-1) + n(n-2) - (n-1)(n-2)$ (qualsevol)

DEMO

L'increment que tenim al posar n entre i i j és

$$n_i + n_j - i_j, \text{ on } i, j \in n-1.$$

Suposem que els valors i, j no són $n-1, n-2$.

~~Suposem que $n-1$ és més petit que $n-2$.~~ Si algun és més petit, $n-1$ ho és del dos que el podem augmentar una unitat (suposem i). Altrament,

$$n_j + n_i - i_j = n_j + i(n-j) < n_j + (i+1)(n-j)$$

Per tant, i, j no és el màxim increment

A part, observem que

$$\begin{aligned} \text{"valor d'una distribució de } n \text{"} &= \text{"valor de la"} + \text{"increment"} \\ &\text{distribució size } n \text{ } \quad \text{alegint } n \\ &\quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ &S(n-1) \quad \quad \Delta(n). \end{aligned}$$

$$\implies \text{"valor d'una distribució"} \leq S(n-1) + \Delta(n).$$

Però aquest valor s'assoleix prenent la distribució indexada per a $n-1$ i posant i entre $n-1$ i $n-2$, per tant és la millor distribució.

Per aclarar, Per H.I. $S(n-1)$ es dona amb

$$\dots \textcircled{n-4} - \textcircled{n-3} - \textcircled{n-2} - \textcircled{n-1} \dots$$

i ara podem assolir $\Delta(n)$ posant i entre $\textcircled{n-1}$ i $\textcircled{n-2}$. Per tant, $S(n) \leq S(n-1) + \Delta(n)$

es dona amb

per tant $S(n) = S(n-1) + \Delta(n)$ i es dona amb la permutació que hem dit.

Està clar? Joder.