A TOPOGAUSS - P32

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{ T>0 \text{ tq } f(x) = f(x+T) \ \forall x \in \mathbb{R} \}$

Sigui $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Aleshores, com $\forall x \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Q}^+ \quad x \in \mathbb{Q} \iff x+q \in \mathbb{Q}$,

$\mathbb{Q}^+ \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}$ no té mínim perquè $\inf_{x \in \mathcal{T}} \mathcal{T} = 0$

però $0 \notin \mathcal{T}$. ($\forall \varepsilon > 0 \ \exists q \in \mathbb{Q}$ tq $\varepsilon > q > 0$ i f és q-periòdica)

Sigui ara f contínua. $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^+$ és un subconjunt de $\mathbb{R}$ inferiorment fitat (per 0) i per tant té ínfim.

Sigui(*) $0 < \mu = \inf \mathcal{T} \Rightarrow \exists \{\mu_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{T}$ tq $\lim_{k \to \infty} \mu_k = 0$

i $f(x) = f(x + \mu_k) \ \forall x \in \mathbb{R}$. Com f és contínua

$$\lim_{k\to\infty} f(x+\mu_k) = f\left(\lim_{k \to \infty} (x+\mu_k) \right) = f(x+\mu)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{k \to \infty} f(x) = f(x) \qquad \Rightarrow f(x) = f(x+\mu) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mu \in \mathcal{T} \\ \mu = \inf \mathcal{T} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{T} \text{ té mínim}$$

(*) Suposem ara $\inf \mathcal{T} = 0$, i $f(x)$ no constant.

$\Rightarrow \exists x_0 \neq y_0$ tq $f(x_0) \neq f(y_0)$ WLOG sigui $x_0 < y_0$

f cont. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq $\forall y \mid |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)|$

Prenem $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0) - f(y_0)|}{2}$, amb el corresponent δ.

Com $\inf \mathcal{T} = 0 \Rightarrow \exists \mu \in \mathcal{T}$ tq $0 < \mu < \delta$. Sigui $n \in \mathbb{N}$

tq $x_0 + \mu n \leq y_0 \leq x_0 + \mu(n+1)$

$$\Rightarrow |x_0 - y_0 + \mu n| \leq \mu < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x_0 + \mu n) - f(y_0)| < \varepsilon$$

Però $\mu \in \mathcal{T} \Rightarrow f(x_0 + \mu n) = f(x_0)$

$$\Rightarrow \underbrace{|f(x_0) - f(y_0)|}_{= 2\varepsilon} < \varepsilon \Rightarrow 2\varepsilon < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < 0 \;!!!$$

Hem arribat a una contradicció i per tant o bé $\inf \mathcal{T} > 0$ o bé f és constant.

Notebloc