PROBLEMA 44 CAVALLERIA MATFIS

a) Claro que la marató no puede durar infinitamente. Como los participantes somos seres humanos, algún día moriremos.

b) En principio hasta el domingo porque paro de petarme más clases el lunes. Pero como el resto de problemas sean así de fáciles como mucho durará hasta el sábado.

Si has seguido bajando hasta aquí es porque confiábas en nuestra inteligencia para haber resuelto el problema.
(de verdad)

Gracias :)

Pero lamento decirte que no es así, no tenemos ninguna solución. :(

Eres insistente ehh...

Pues si que tienes fé en nosotros...

Bueno, por haber llegado hasta aquí te doy una solución, que me das pena.

a) Para demostrar que no dura infinitamente, basta con ver que no es posible que se de un ciclo, de manera que se repita una misma posición dos veces a lo largo de la carrera. De lo contrario podrías realizar adelantamientos de forma periódica indefinidamente.

Esto se comprueba fácilmente ya que si tu tienes que p_i (consultar glosario) se repite tras k adelantamientos ($k \in \mathbb{N}$ (consultar glosario))

Tenemos que:

$$\begin{array}{c} \underline{p_i} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ n \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{array} \sim \overset{k)}{\cdots} \sim \begin{array}{c} \underline{p_{i+k}} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ n \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{array}$$

Pero es evidente que el n no puede hacer ningún adelantamiento a lo largo de la marató ya que esta terminaría, de manera ninguno de los adelantamientos que tengan lugar entre... p_i y p_{i+k} será de una posición por detrás de n a otra por delante (es decir adelantar a n). Ya que n no podría subir puestos para recuperar su posición en p_i.

De modo que "n" permanece fijo y todos los adelantamientos se dan por delante o por detrás suya. Generalizando podemos ver fácilmente que si tenemos n' participantes, el dorsal de alguno de ellos ha de ser mayor o igual a n'.

De modo que si restringes las zonas donde pueden haber adelantamientos a un numero n' de coches consecutivos vas a tener que uno de los participantes habrá de permanecer en su sitio en todo momento y por tanto aplicando este razonamientos reiteradamente, todos los participantes deberán permanecer quietos, es decir, es imposible que se de dos veces la misma posición p_i a lo largo de toda la marató. Como el número de posiciones distintas es finito ($n!$), ésta no puede durar indefinidamente.

b) Ahora vamos a definir una posición inicial y otra final:

p_0	p_f
n	1
$n-1$	2
$n-2$	3
$\vdots$	$\vdots$
2	$n-1$
1	n

Es obvio que no has podido hacer ningún adelantamiento para llegar a p_0 (ya que debería hacerse desde la posición $n+1$-ésima) y que tampoco puedes hacer un adelantamiento a partir de p_f sin que termine la marató. Sea ahora p_i una posición cualquiera a lo largo de la marató:

Si n se encuentra en la Posición a_j, entonces podemos realizar los adelantamientos necesarios en orden para llevar "n" a la Posición a_n. Empezando por el más pequeño que ha de ser menor o igual a j y haciendo que adelante a "n" y luego con el siguiente más pequeño...

p_i
a_1
a_2
$\vdots$
a_j
$\vdots$
a_n

De manera que de p_j llegamos a $p_{i_1} = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ n \end{matrix}$

y repitiendo el procepimiento a $p_{i_2} = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ n-1 \\ n \end{matrix}$ ...

y así hasta $p_{i_n} = p_f$.

De manera que de cualquier posición p_j a lo cargo de la marató, podremos llegar a p_f.

Si ahora realizamos la marató en dirección contraria, emperando en la meta y adelantando hacia atrás (XD) podemos seguir el razonamiento anterior para demostrar que de cualquier p_j podrías llegar a p_0. Y por tanto rerehaciendo los movimientos a la iinversa (consultar glosario) puedes asegurar que en la marató normal puedes llegar a la posición p_j partiendo de p_0.

Ya nos vamos acercando al final.

Por tanto, si definimos una marató como una suceción de posiciones $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_m)$, tenemos que siempre podrás alargarla si $p_0 \neq p_1$ y $p_m \neq p_f$.

$(p_1, p_2, \dots, p_m) \leq (p_0, \dots, p_1, p_2, \dots, p_{m-1}, p_m, \dots p_f)$.

(consultar glosario)

Dicho esto realizamos la siguiente conjetura:

$T_n = 2T_{n-1} + (n-1)$ donde T_n es el tiempo máximo que dura una marató de n participantes. Para demostrarlo primero clasificamos los adelantamientos en 3 tipos. aquellos en los que se adelanta a n (en total $n-1$, trivial), los que tienen lugar detrás de n, y los que tienen lugar delante de n.

Claramente los adelantamientos de estos dos últimos tipos son a lo sumo T_{n-1} ya que por definición T_{n-1} es el número máximo de adelantamientos con $n-1$ participantes, y detrás de n siempre van a haber menos de n participantes... Ahora queda ver que existe una coloración para $2T_{n-1}+(n-1)$ adelantamientos. Efectivamente: (sino menuda putada)

$$\begin{array}{ccccccc}
\underline{p_0} & & \underline{p_{T_{n-1}}} & & \underline{p_{T_{n-1}+n}} & & \underline{p_{T_{n-1}+n-1+T_{n-1}}} \quad (\varphi_1) \\
n & & n & & n-1 & & 1 \\
n-1 & \xrightarrow{T_{n-1})} & 1 & \xrightarrow{n-1)} & n-2 & \xrightarrow{T_{n-1})} & 2 \\
\vdots & & 2 & & \vdots & & \vdots \\
2 & & \vdots & & 2 & & n-1 \\
1 & & n-1 & & 1 & & n \\
 & & & & n & &
\end{array}$$

Por último Gabriel vió que $T_n = 2T_{n-1}+(n-1) = 2^n-n-1$

Pero me da pereza explicar de donde lo sacó (realmente no lo entendí) así que me voy a dedicar a comprobar que funciona por inducción:

Caso base: No se cual es pero siempre es trivial

Caso general: $T_n = 2^n-n-1 \stackrel{?}{=} 2(2^{n-1}-(n-1)-1)+n-1 =$

$= 2^n-2n+n-1 = 2^n-n-1$ ✓ En efecto, se cumple y por tanto, el número máximo de adelantamientos para n participantes es 2^n-n-1, lo que implica que la duración máxima de la marató es 2^n-n-1 mins

Glosario

p_i : posición que adquiere una marató tras el i-esimo adelantamiento.

posición: Orden de los participantes

glosario: De normal, los glosarios están ordenados alfabéticamente para facilitar la burqueda al lector. A mi me la suda el orden.

Posición: posición que ocupa un participante en una posición concreta.

Rerrehacer: hacer un movimiento que habías desecho de nuevo (¡¡¿Qué?!!)

Inversa: la inversa de la inversa.

$\leq$: Comúnmente conocido como menor o igual que..; en nuestro problema significa menor o igual que...