XXVI Marató de Problemes

Fila H

Problema 52

Primero vamos a calcular la probabilidad de acabar con la hidra si nos quedan n cabezas, P_n. Claramente $P_0 = 1$, ya que si le quedan 0 cabezas es que la has matado. Teniendo en cuenta que hay 1/2 de probabilidad de que si la hidra tiene n cabezas, al cortarle una se quede con n, y 1/4 de que se quede con $n-1$ y $n+1$. Por tanto nos queda la relación de recurrencia $P_n = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{4}P_{n+1} + \frac{1}{4}P_{n-1} \Leftrightarrow P_{n+1} - 2P_n + P_{n-1} = 0$ para la sucesión P_n. Por lo tanto la podemos resolver usando el método del polinomio característico.

El polinomio característico de esta recurrencia es $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$. Por tanto, como la raíz del polinomio característico es 1 con multiplicidad 2, el término general de la sucesión P_n será de la forma $P_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot n 1^n$, donde α y β son dos constantes que dependen de las condiciones dadas sobre la sucesión. En este caso, $P_0 = 1 \Rightarrow 1 = \alpha + \beta \cdot 0 \Rightarrow \alpha = 1$. Por tanto nos queda que $P_n = 1 + \beta n$.

Por otra parte, al ser P_n una sucesión de probabilidades, sabemos que $P_n \in [0,1]\ \forall\ x$, por tanto $\beta \leq 0$, ya que si no $P_1 = 1 + \beta > 1$. Y también tenemos que $\beta \geq 0$, ya que si $\beta < 0$, entonces $P_{\lceil \frac{1}{|\beta|} \rceil + 1} = 1 + \beta \left(\lceil \frac{1}{|\beta|} \rceil + 1 \right) < 1 + \beta \frac{1}{|\beta|} = 1 - 1 = 0$. Por tanto tenemos que $\beta = 0$, y la sucesión P_n nos queda constante igual a 1, es decir, que la probabilidad de matar a la hidra es siempre 1, independientemente del número inicial de cabezas.

Ara calcularem el nombre de talls que cal fer (mencionar que ens ha sorprès tant el resultat que ens hem canviat de idioma i tot) Veurem que, fins i tot en el cas $n = 1$ (quan la hidra té un sol cap) el nombre de talls esperat a fer per tal de matar-la divergeix, és a dir, és infinit. Trivialment assumirem que en el cas de 10 caps la hidra també divergeix (òbviament).

Primer de tot ens marcarem una "tremenda bijecció"per entendre el problema una mica millor. Com té un 50% de probabilitat a cada cap que es regeneri, aleshores després de cada tall sabem que tindrà: un 25% d'acabar amb un cap més, un 50% d'acabar amb el mateix nombre de caps i un 25% d'acabar amb un cap menys. En aquest cas considerarem que hi ha un 50% de probabilitats que tant augmenti en un cap com decreixi en un, ja que mantenir el nombre de caps deixaria el problema exactament igual amb un tall més, i com estem veient que divergeix no resulta rellevant. (Estem veient una fita inferior).

La bijecció en aquest problema es tracta de veure que tallar un cap o créixer un cap es com treure una cara i una creu. A més, matar la hidra és equivalent a, en qualsevol moment, tenir més cares que creus. Per tant, calcularem el nombre esperat de tirades fins tenir 1 cara més que creus. Sabem que per probabilitats i variables discretes:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$$

En aquest cas com volem veure el nombre esperat de torns abans de treure una cara més p_i serà la probabilitat de treure la cara que les farà ser una més i x_i el torn en qüestió on passa. El primer del que ens adonem és que necessàriament es donarà en torn imparell (és impossible que s'aconsegueixi majoria en un torn parell, com a màxim igualar) per tant només hem de tenir en compte els torns de la forma $2n+1$.

Sabem que el nombre de possibles combinacions de cares i creus (paraules binàries) de longitud $2n$ (amb igual nombre de cadascuna) que no tenen en cap moment més cares que creus ve determinat pel nombre de Catalan C_n. Per tant la probabilitat que al torn $2n+1$ tinguem la majoria de cares és un mig de la probabilitat de tenir el mateix nombre al torn $2n$. Per tant:

$$P(|H| > |T|)_{2n+1} = \frac{1}{2}\frac{C_n}{2^{2n}}$$

On H i T es refereix a Heads i Tails i la probabilitat s'ha calculat com casos favorables entre totals. Finalment calculem $E[X]$:

$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{2^{2n+1}}(2n+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)2^{2n+1}}\binom{2n}{n}$$

Amb veure que aquesta suma és divergent hem acabat. Comencem agrupant termes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)2^{2n+1}}\binom{2n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}}\binom{2n+1}{n+1}$$

I ara fent servir l'aproximació d'Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

$$\frac{1}{2^{2n+1}}\binom{2n+1}{n+1} \sim \frac{1}{2^{2n+1}} \frac{\sqrt{2\pi(2n+1)}(\frac{n}{e})^{2n+1}}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi(n+1)}(\frac{n+1}{e})^{n+1}} \sim$$

$$\frac{1}{2^{2n+1}} \frac{\sqrt{(2n+1)}}{\sqrt{2\pi n(n+1)}} \frac{(2n+1)^{2n+1}}{n^n(n+1)^{n+1}} \sim \frac{1}{2^{2n+1}}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}2^{2n+1} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

On hem fet servir que n és asimptòticament equivalent a $n+1$ per simplificar termes. Per tant la suma en l'infinit és equivalent a la suma de l'invers de les arrels, que per ser més gran que la sèrie harmònica és divergent. $\square$