122) EULERDOS.

Notem $(|f|-|f'|)^2 \geq 0$ $\forall f$ i $\forall x$, llavors $f^2+f'^2 \geq \overbrace{2|f|\cdot|f'|}^{\geq 0} \geq 2f\cdot f'$

Llavors, com $F(f)$ és la integral d'una funció positiva, és positiu. Per tant, tenim

$$F(f) = \int_0^\infty f^2+f'^2 \geq \int_0^\infty |2f\cdot f'| \geq \left|\int_0^\infty 2ff'\right|.$$

Aleshores, $\forall R>0$

$$\int_0^R 2ff' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regla cadena}}}{=} \int_0^R (f^2)' = (f^2)\Big|_0^R = f(R)^2 - f(0)^2 = f(R)^2 - a^2$$

En particular, si considerem f tq $\int_0^\infty 2ff'$ és convergent (si div., el seu $|\cdot|$ no serà el mínim que cerquem), aleshores

$$\left|\int_0^\infty 2ff'\right| = \lim_{R\to\infty}\left|\int_0^R 2ff'\right| \geq a^2.$$

(✱) Justifiquem $\lim_{R\to\infty} f(R)^2$

Vegem que aquest mínim es pot assolir. Amb $f=+ae^{-x} \Rightarrow f'=-ae^{-x}$

$$\int_0^\infty f^2+f'^2 = \int_0^\infty a^2e^{-2x}+a^2e^{-2x} = a^2\int_0^\infty 2e^{-2x} = a^2(-e^{-2x})\Big|_0^\infty = 0-(-a^2) = a^2.$$

i satisfà $f(0)=ae^{-0}=a$.

---

311) Tenim ...

Scanned with CamScanner

Estem considerant f pels quals $F(f)$ no divergeix, si ho fes no podrien ser mínim. ja que $F(f) \geq 0$. ~~divergeixen a +∞~~

En part., $\int_0^\infty f^2+f'^2$ abs. conv. $\Rightarrow$ $\int_0^\infty f^2$, $\int_0^\infty f'^2$ abs. conv.

Notem que f' ha de ser eventualment negativa, ja que si f volem que minimitzi haurà de ser fitada. Tot plegat, si volem minimitzar, cal que $f \to 0$.

Això implicarà efectivament

$$\left| \int_0^\infty 2ff' \right| = \left| \lim_{R\to\infty} f(R)^2 - a^2 \right| = a^2$$

Notem que si f passa en algun moment pel 0, li va millor quedar-se al 0 (minimitza). Llavors podem suposar f sempre positiva. Si f' és positiva en algun punt, no minimitzaríem, ja que li surt millor ser negativa o 0. En particular, segueix el raonament anterior.