XXVI Marató de Problemes

Fila H

Problema 123

Com estem tractant el cas de les matrius 2x2, podem anomenar els 4 elements de cadascuna de les matrius de la següent manera.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

Sabem que en una matriu 2x2 la matriu inversa de A ve donada per la següent fòrmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{a_1a_4 - a_2a_3} \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix}$$

Per tant, fàcilment arribem a la conclusió que si A és una matriu amb coeficients enters i la seva inversa també té coeficients enters, aleshores necessàriament el determinant , és a dir $a_1a_4 - a_2a_3$, ha de ser ± 1. Demostrarem això per contradicció. Sigui el determinant $d \neq \pm 1$. Si la matriu inversa ha de tenir coeficients enters aleshores $d|a_i \quad i = 1, 2, 3, 4$. Per tant, cada a_i el podem reescriure com $a_i = dc_i$(amb c_i enters) Ara arribem a la contradicció, doncs el determinant serà $d = d^2(c_1c_4 - c_2c_3)$, que és contradicció si $d \neq \pm 1$

Podem assegurar, doncs:

$$det(A + nB) = \pm 1 \quad n = 0, ..., 4$$

Per veure que $A + 5B$ és invertible i l'invers coeficients enters, només fa falta veure que el seu determinant és ± 1, ja que tant els coeficients de A com de B són enters. Desenvolupem el determinant que hem trobat anteriorment:

$$det(A + nB) = (a_1 + nb_1)(a_4 + nb_4) - (a_2 + nb_2)(a_3 + nb_3) =$$

$$a_1a_4 - a_2a_3 + n(a_1b_4 + a_4b_1 - a_2b_3 - a_3b_2) + n^2(b_1b_4 - b_2b_3)$$

Ja ho tenim, doncs veiem que es tracta d'un polinomi de grau 2 en n i tenim 5 punts definits en valor ± 1. Pel principi del colomar almenys 3 de ells han de ser iguals, el que implica que el polinomi (de grau 2) té tres imatges iguals. Amb això assegurem que el polinomi és constant per un valor ± 1 $\forall n$, el que implica que $det(A + 5B) = \pm 1$ que és el que volíem veure. $\square$